ÉTUDE ÉLÉMENTAIRE DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE COMPLEXE - TOME I

par

Robert Rolland

Table des matières

1. Introduction

Ce texte est un résumé qui reprend les résultats élémentaires classiques de la théorie des fonctions holomorphes d'une variable complexe. On y trouvera une présentation complète des théorèmes principaux de la théorie de Cauchy et de celle de Weierstrass. On y trouvera une étude des points singuliers isolés, des séries de Laurent et des fonctions méromorphes. En particulier on étudiera les zéros et les pôles de ces fonctions ainsi que la construction de fonctions ayant des zéros et des pôles imposés.

S'agissant d'un résumé, on ne trouvera pas de longues digressions ni d'exemples édifiants, si ce n'est les applications classiques du théorème des résidus au calcul de certaines intégrales. Les développements sur les transformations complexes, en particulier le théorème de l'application ouverte, l'étude des transformations conformes de parties du plan, les constructions de fonctions classiques qui s'expriment avec des produits et sommes infinis, comme par exemple la fonction Gamma, la fonction de Weierstrass et plus généralement les fonctions elliptiques, feront partie d'un autre tome.

Le lecteur qui voudrait enrichir ses connaissances sur les notions développées ici peut se référer aux livres suivants : (liste non exhaustive)

- Lars Ahlfors, Complex Analysis, McGraw-Hill ;
- Henri Cartan, Théorie élémentaire des fonctions analytiques, Hermann ;
- Dictionnaire des Mathématiques, Fonctions analytiques, Encyclopædia Universalis, Albin Michel ;
- Mikhaïl Lavrentiev & Boris Chabat, Méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe, Mir ;
- Walter Rudin, Real and Complex Analysis, McGraw-Hill ;

Dans toute la suite on supposera que sont connus les résultats élémentaires sur les séries entières et les fonctions qu'elles définissent sur leur disque de convergence.

PARTIE I

RAPPELS SUR LA NOTION DE DIFFÉRENTIABILITÉ

2. Notations - Définitions

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies respectives n et m sur $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur un ouvert Ω de E, à valeurs dans F et z_0 un point de Ω. Nous noterons $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace des applications $\mathbb{R}$-linéaires de E dans F.

Définition 2.1. — La fonction f est **différentiable** au point z_0 s'il existe une application linéaire $df(z_0) \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que

$$f(z) = f(z_0) + df(z_0)(z - z_0) + o(\|z - z_0\|).$$

L'application linéaire $df(z_0) \in \mathcal{L}(E, F)$ est la **différentielle** de f en z_0 (notée aussi parfois $f'(z_0)$).

Définition 2.2. — Si f est différentiable en tout point de Ω, l'application df de Ω dans $\mathcal{L}(E, F)$ qui à z associe $df(z)$ est la **différentielle** de f.

3. Fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$

Si on fixe des **bases** dans E et dans F on identifie E à $\mathbb{R}^n$ et F à $\mathbb{R}^m$. La fonction f sera alors identifiée à une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ que par abus nous noterons encore f. Plus précisément nous aurons

$$f(x) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \Big(f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n), \cdots, f_m(x_1, x_2, \cdots, x_n)\Big)$$

Théorème 3.1. — *Si f est différentiable au point $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ la différentielle de f en ce point a une matrice (matrice* **jacobienne***)*

donnée par

$$J(f,a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ . & . & \cdots & . \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

où les $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$ *sont les dérivées partielles de* f *au point* a.

Les fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ on une importance particulière puisque se donner une fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ revient en fait à se donner m fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

Considérons le cas particulier important de la fonction p_i qui à $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ fait correspondre $p_i(x) = x_i$. Cette fonction est linéaire, donc elle est différentiable en tout point et sa différentielle en ce point est elle même

$$dp_i(x) = p_i.$$

Ainsi la différentielle dp_i de la fonction p_i est l'application constante de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ qui prend la valeur p_i.

Pour des raisons historiques l'application linéaire $dp_i(x) = p_i$ est notée dx_i (ou dy_i ou dt_i ... suivant les noms des variables utilisées). Ainsi $dx_i(h) = h_i$.

Théorème 3.2. — *Les* dx_i *forment une base de* $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ *et*

$$df(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)dx_n.$$

Attention : Compte tenu de l'abus de notation habituel qui consiste à noter une fonction constante par sa valeur on trouvera parfois aussi la notation dx_i pour la fonction constante dp_i qui à tout x associe $dx_i = dp_i(x) = p_i$.

4. Le cas des fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$

Nous considérons dans cette section $\mathbb{C}$ comme **espace vectoriel sur** $\mathbb{R}$ et nous l'identifions quand il le faut à $\mathbb{R}^2$ de la manière habituelle.

Soit ϕ la fonction de $\mathbb{C}$ dans lui même qui à z associe z. Il est clair que la différentielle $d\phi(z_0)$ de ϕ en tout point z_0 est la fonction ϕ elle même. Nous **noterons**

$$dz = d\phi(z_0) = \phi.$$

Introduisons également la fonction $\bar{\phi}$ qui à z associe $\bar{z}$. Il est clair là aussi que $d\bar{\phi}(z_0) = \bar{\phi}$. Nous **noterons**

$$d\bar{z} = d\bar{\phi}(z_0) = \bar{\phi}.$$

Ainsi dz et $d\bar{z}$ sont des applications $\mathbb{R}-$linéaires de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ (donc si on veut de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$).

Pour tout $h = h_1 + ih_2$ on a

$$dz(h) = dx(h) + idy(h)$$
$$d\bar{z}(h) = dx(h) - idy(h)$$

On écrira donc

$$dz = dx + idy$$
$$d\bar{z} = dx - idy$$

mais avec prudence car dz et $d\bar{z}$ sont des application $\mathbb{R}-$linéaires de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ c'est-à-dire linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ tandis que dx et dy sont linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. (Ce qui fait fonctionner la notation c'est que $\mathbb{R}$ est considéré comme inclus dans $\mathbb{C}$.)

Soit une fonction différentiable f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, considérée donc aussi comme fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

$$f(x + iy) = f_1(x + iy) + if_2(x + iy)$$

ou encore

$$f(x, y) = \Big(f_1(x, y), f_2(x, y)\Big).$$

Calculons alors $df(z_0)$

$$df(z_0)(h_1, h_2) = \Big(df_1(z_0)(h_1, h_2), df_2(z_0)(h_1, h_2)\Big)$$

ou encore

$$df(z_0)(h_1+ih_2)=df_1(z_0)(h_1+ih_2)+idf_2(z_0)(h_1+ih_2)$$

mais

$$df_1(z_0)=\frac{\partial f_1}{\partial x}(z_0)dx+\frac{\partial f_1}{\partial y}(z_0)dy$$

tandis que

$$df_2(z_0)=\frac{\partial f_2}{\partial x}(z_0)dx+\frac{\partial f_2}{\partial y}(z_0)dy$$

si bien que

$$df(z_0)=\Big(\frac{\partial f_1}{\partial x}(z_0)dx+\frac{\partial f_1}{\partial y}(z_0)dy,\frac{\partial f_2}{\partial x}(z_0)dx+\frac{\partial f_2}{\partial y}(z_0)dy\Big)$$

ou encore

$$df(z_0)=\frac{\partial f_1}{\partial x}(z_0)dx+\frac{\partial f_1}{\partial y}(z_0)dy+i\Big(\frac{\partial f_2}{\partial x}(z_0)dx+\frac{\partial f_2}{\partial y}(z_0)dy\Big)$$

et en posant

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)=\frac{\partial f_1}{\partial x}(z_0)+i\frac{\partial f_2}{\partial x}(z_0)$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)=\frac{\partial f_1}{\partial y}(z_0)+i\frac{\partial f_2}{\partial y}(z_0)$$

on peut écrire

$$df(z_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)dx+\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)dy.$$

En remarquant que $dx=\frac{1}{2}(dz+d\bar{z})$ et que $dy=\frac{i}{2}(d\bar{z}-dz)$ on obtient

$$df(z_0)=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)-i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\Big)dz+\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)+i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\Big)d\bar{z}.$$

Définissons

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z_0)=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)-i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\Big)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)+i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\Big)$$

on peut alors écrire

$$df(z_0)=\frac{\partial f}{\partial z}(z_0)dz+\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0)d\bar{z}.$$

5. Les formes différentielles

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Une forme différentielle ω définie sue Ω est une application de Ω dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ ou encore $\mathcal{L}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$. Remarquons que les formes linéaires particulières dx et dy forment une $\mathbb{C}$-base de $\mathcal{L}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$. En effet, si $l(x+iy) = ax+by+i(cx+dy)$ alors $l = (a+ic)dx+(b+id)dy$. En conséquence, toute forme différentielle ω s'écrit sous la forme

$$\begin{array}{rccl} \omega : & \Omega & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \\ & x+iy & \longmapsto & \omega(x,y) = P(x,y)dx + iQ(x,y)dy \end{array}$$

et

$$\omega(x,y)(h_1+ih_2) = P(x,y)h_1 + Q(x,y)h_2.$$

En faisant l'abus de notation habituel qui consiste à nommer une fonction constante par la valeur de cette constante, on notera encore dx et dy les fonctions constantes de Ω dans $\mathcal{L}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ qui ont pour valeurs respectives dx et dy. Ainsi la forme différentielle ω s'écrira :

$$\omega = P\,dx + Q\,dy.$$

Remarquons aussi que :

$$\omega = f_1\,dz + f_2\,d\bar{z},$$

avec

$$f_1 = \frac{1}{2}(P - iQ) \quad f_2 = \frac{1}{2}(P+iQ).$$

Un problème fondamental est de savoir si une différentielle est la différentielle d'une fonction ou non, c'est-à-dire de déterminer s'il existe une fonction F de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, différentiable telle que $dF = \omega$, ce qui se traduit par

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q,$$

ou encore

$$\frac{\partial F}{\partial z} = f_1 \quad \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = f_2.$$

Nous ne développons pas plus ici cette théorie. Nous étudierons par la suite quelques formes différentielles importantes pour la théorie des fonctions holomorphes, par exemple

$$f(z)dz, \frac{dz}{z-z_0}, \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz.$$

On pourrait dès à présent faire une étude générale des formes différentielles, d'où découleraient quelques théorèmes centraux sur les fonctions d'une variable complexe. Nous préférons dans ce cours élémentaire redémontrer pour les cas particuliers fondamentaux dont nous avons besoin, ces résultats généraux.

PARTIE II
FONCTIONS D'UNE VARIABLE COMPLEXE

6. Fonctions holomorphes

6.1. Dérivation complexe. — Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, a un point de Ω et f une application de Ω dans $\mathbb{C}$. On suppose que $P(x,y) = \mathcal{R}e\Big(f(x,y)\Big)$ et que $Q(x,y) = \mathcal{I}m\Big(f(x,y)\Big)$ si bien que

$$f(x+iy) = P(x,y) + iQ(x,y).$$

Définition 6.1. — La fonction f est dite **dérivable au point** a **par rapport à la variable complexe** ou encore **holomorphe au point** a si

$$\lim_{\substack{z \to a \\ z \in \Omega \setminus \{a\}}} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} \quad \textit{existe.}$$

Cette limite est alors notée $f'(a)$ et est appelée la **dérivée complexe** de f au point a.

Définition 6.2. — La fonction f est dite **holomorphe sur** Ω si f est holomorphe en tout point de Ω. Une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier est une fonction **entière**.

Nous allons maintenant voir quels sont les liens entre la dérivabilité complexe et la différentiabilité de f en tant que fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Dans la suite de ce paragraphe une fonction f définie sur une partie de $\mathbb{C}$

à valeurs dans $\mathbb{C}$ sera donc aussi considérée comme une fonction définie sur une partie de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ On notera ainsi

$$f(z) = f(x, y) = P(x, y) + iQ(x, y),$$

où P et Q sont des fonctions à valeurs réelles.

Théorème 6.3. — *Pour que f soit holomorphe en un point $z_0 = x_0 + iy_0$ il faut et il suffit que f soit différentiable au point (x_0, y_0) et que les conditions suivantes appelées* **conditions de Cauchy** *soient vérifiées*

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0)$$
$$\frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0)$$

où P et Q sont respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de f (c'est-à-dire $f = P + iQ$).

Démonstration. — Si f est dérivable au point z_0 on peut écrire

$$(1) \qquad f(z) - f(z_0) = f'(z_0)(z - z_0) + o(|z - z_0|).$$

On écrit cette égalité en utilisant les notations des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y)-f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \mathcal{R}e\left(f'(z_0)\right) & -\mathcal{I}m\left(f'(z_0)\right) \\ \mathcal{I}m\left(f'(z_0)\right) & \mathcal{R}e\left(f'(z_0)\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + o(|z-z_0|)$$

ce qui montre que la fonction f est bien différentiable et que la matrice

$$\begin{pmatrix} \mathcal{R}e\left(f'(z_0)\right) & -\mathcal{I}m\left(f'(z_0)\right) \\ \mathcal{I}m\left(f'(z_0)\right) & \mathcal{R}e\left(f'(z_0)\right) \end{pmatrix}$$

est la matrice jacobienne de f au point $z_0 = x_0 + iy_0$. En conséquence les conditions de Cauchy sont bien vérifiées.

Réciproquement supposons que f soit différentiable en (x_0, y_0) et que les conditions de Cauchy soient vérifiées. On a alors

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = J_{(x_0,y_0)} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + o(||(x - x_0, y - y_0||).$$

Comme les conditions de Cauchy sont réalisées, le produit matriciel

$$J_{(x_0,y_0)} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

s'interprète comme produit d'un nombre complexe qu'on notera $f'(z_0)$ par le nombre complexe $(z - z_0)$. On obtient donc la relation (1), ce qui montre que f est dérivable par rapport à la variable complexe z avec $f'(z_0)$ pour dérivée. □

Remarque 6.4. — On a donc

$$f'(z_0) = \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0)$$

On déduit de ce théorème le résultat suivant

Théorème 6.5. — *Pour que f soit holomorphe au point z_0 il faut et il suffit que f soit différentiable et que*

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$$

Démonstration. — On peut écrire successivement à partir des définitions

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\Big)$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial P}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial P}{\partial y}(z_0) - \frac{\partial Q}{\partial y}(z_0)\Big).$$

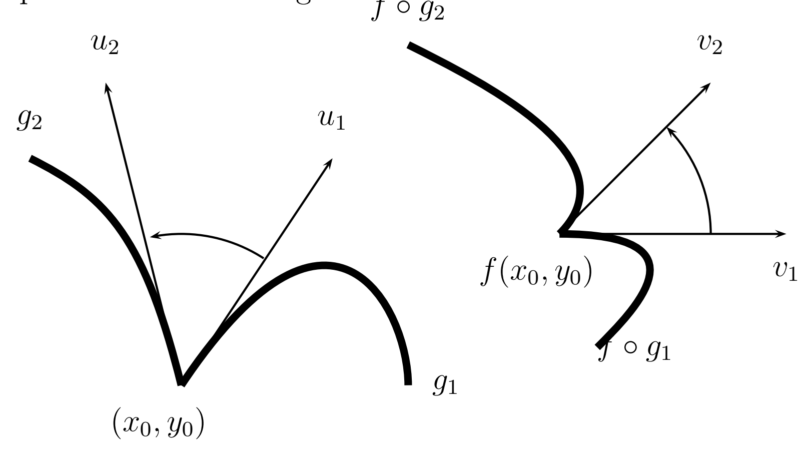
Les conditions de Cauchy sont équivalentes à la nullité de la dernière expression. □

6.2. Interprétation géométrique. — Nous allons voir que l'holomorphie de f en un point z_0 est liée à un certain comportement géométrique de la transformation f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

Théorème 6.6. — *Si f est holomorphe de dérivée non nulle au point z_0 alors la transformation f conserve les angles en ce point. Plus précisément soit g_1 et g_2 deux fonctions de classe C^1 de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}^2$ telles que $g_1(0) = g_2(0) = (x_0, y_0)$, $g_1'(0) \neq 0$ et $g_2'(0) \neq 0$. Notons $u_1 = g_1'(0)(1)$ et $u_2 = g_2'(0)(1)$ les vecteurs tangents à ces courbes en (x_0, y_0) puis $v_1 = (f \circ g_1)'(0)(1)$ $v_2 = (f \circ g_2)'(0)(1)$ les vecteurs tangents aux courbes transformées en $f(x_0, y_0)$. Alors $Angle(u_1, u_2) = Angle(v_1, v_2)$.*

En fait il est facile de voir que l'application linéaire tangente à une fonction holomorphe en un point z_0 où la dérivée n'est pas nulle est une **similitude** de rapport $|f'(z_0)|$ et d'angle $Arg\Big(f'(z_0)\Big)$.

Les fonctions holomorphes sont des transformations **conformes** , c'est-à-dire qui conservent les angles.



6.3. Fonctions holomorphes et fonctions harmoniques. — Dans ce paragraphe nous donnons sans démonstration quelques liens entre les fonctions harmoniques et les fonctions holomorphes. Ce paragraphe est donc uniquement descriptif. Il apparaît que la partie réelle d'une fonction holomorphe peut être considérée comme un potentiel, la partie imaginaire définit alors les lignes de champ de ce potentiel. Nous ne démontrerons rien sur les fonctions harmoniques et nous ne nous en servirons pas par la suite pour déduire des propriétés des fonctions holomorphes.

Rappelons qu'une fonction harmonique f définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ (à valeurs dans $\mathbb{C}$ ou dans $\mathbb{R}$) est une une fonction de classe C^2 qui vérifie :

$$\Delta(f)(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0,$$

où $\Delta(f)$ désigne le laplacien de f.

On montre qu'une fonction harmonique est analytique (en deux variables) et satisfait au principe du maximum ainsi qu'à la propriété de valeur moyenne :

Théorème 6.7. — *Soit f une fonction harmonique sur un ouvert U. Alors pour tout point $a \in U$ et tout disque $D(a,r)$ de centre a et de rayon r inclus dans U on a la propriété de moyenne suivante :*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta})d\theta.$$

Réciproquement :

Théorème 6.8. — *Soit f une fonction continue sur l'ouvert U telle que pour tout point $a \in U$ et tout disque $D(a,r)$ de centre a et de rayon r inclus dans U :*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta})d\theta,$$

alors f est harmonique sur U.

Nous montrerons par la suite qu'une fonction holomorphe est analytique, donc il y a des dérivées partielles continues de tous ordres. Les conditions de Cauchy montrent alors qu'une fonction holomorphe a un laplacien nul. Un fonction holomorphe est donc une fonction harmonique complexe.

En outre on peut montrer qu'une fonction harmonique réelle est localement la partie réelle d'une fonction holomorphe.

Si on considère la fonction holomorphe $f(x,y) = P(x,y) + iQ(x,y)$ où P et Q sont des fonctions réelles, alors P et Q sont des fonctions harmoniques et si $P(x,y) = c_1$ sont les lignes de niveau du potentiel P alors les $Q(x,y) = c_2$ en sont les lignes de champ (ceci résulte des conditions de Cauchy).

6.4. Opérations sur les fonctions holomorphes. — Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Nous noterons $H(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω. Les théorèmes sur la dérivation des fonctions nous permettent d'énoncer les propositions suivantes.

Théorème 6.9. — *$H(\Omega)$ est une algèbre sur $\mathbb{C}$. Plus précisément pour tout f,g dans $H(\Omega)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ on a*

$$f + g \in H(\Omega) \quad et \quad (f+g)' = f' + g'$$

$$\lambda f \in H(\Omega) \quad et \quad (\lambda f)' = \lambda f'$$

$$fg \in H(\Omega) \quad et \quad (fg)' = f'g + fg'$$

Théorème 6.10. — *Soient* Ω_1 *et* Ω_2 *deux ouverts de* $\mathbb{C}$, f *une fonction de* $H(\Omega_1)$ *telle que* $f(\Omega_1) \subset \Omega_2$ *et* g *une fonction de* $H(\Omega_2)$. *Alors* $g \circ f \in H(\Omega_1)$.

Théorème 6.11. — *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{C}$ *et* $F \in H(\Omega)$. *Soit* Δ *un ouvert de* $\mathbb{C}$ *et* f *une fonction continue de* Δ *dans* $\mathbb{C}$ *telle que* $f(\Delta) \subset \Omega$ *et telle que pour tout* $z \in \Delta$ *on ait*

$$F\Big(f(z)\Big) = z.$$

Soit $z_0 \in \Delta$. *Si* $F'\Big(f(z_0)\Big) \neq 0$ *alors* f *est holomorphe en* z_0 *et*

$$f'(z_0) = \frac{1}{F'\Big(f(z_0)\Big)}.$$

7. Exemples

7.1. Les exemples de base. —

7.1.1. Les polynômes. — Les polynômes sont évidemment dérivables sur $\mathbb{C}$ tout entier et définissent donc des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$ c'est-à-dire des fonctions entières.

7.1.2. Les fractions rationnelles. — Les fractions rationnelles $R(z) = P(z)/Q(z)$ où P et Q sont des polynômes sont holomorphes en tout point qui n'est pas un pôle de $R(z)$.

7.1.3. Fonctions définies par des séries entières. — Une série entière définit une fonction holomorphe sur son disque ouvert de convergence. Il est parfois possible de prolonger la fonction f définie sur le disque D de convergence de la série en une fonction holomorphe définie sur un ouvert contenant strictement D. Le problème du prolongement analytique consiste à trouver le "plus grand prolongement possible" de f. Par

exemple prenons la série entière

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n.$$

Cette série a pour rayon de convergence 1 et définit donc une fonction holomorphe f sur $D = \{z \mid |z| < 1\}$. En fait sur ce disque f coïncide avec la fonction rationnelle $\frac{1}{1-z}$ qui est tout naturellement définie sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

7.1.4. La fonction exponentielle, le sinus et le cosinus. — La fonction exponentielle est définie comme somme de la série entière de rayon de convergence infini :

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Il est facile de vérifier que $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$. Donc si on pose $z = x + iy$, $e^z = e^x e^{iy}$, ce qui montre que $|e^z| = e^x \neq 0$ et que $Arg(e^z) = y$. Comme on le voit facilement, cette fonction est surjective sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ mais n'est pas injective, ce qui va poser quelques problèmes pour définir le logarithme. L'image de la droite $x = x_0$ par la fonction e^z est le cercle de centre 0 de rayon $\rho = e^{x_0}$ parcouru une infinité de fois : $x + iy$ et $x + i(y + 2k\pi)$ ont la même image. Si on restreint $z = x + iy$ à une bande ouverte $B_\alpha = \{z = x + y \mid \alpha < y < \alpha + 2\pi\}$ de largeur 2π alors e^z devient une bijection de l'ouvert B_α sur l'ouvert $\mathbb{C} \setminus D_\alpha$ où D_α est la demi-droite $r\, e^{i\alpha}$ où $r \in [0, +\infty[$.

7.1.5. Les logarithmes. — Soit ζ un nombre complexe de module $\rho > 0$ et d'argument θ

$$\zeta = \rho e^{i\theta}.$$

Les valeurs de z telles que $e^z = \zeta$ sont les complexes

$$\ln(\rho) + i(\theta + 2k\pi).$$

Comme on a vu au paragraphe précédent, l'exponentielle est une bijection de B_α sur $D_\alpha = \mathbb{C} \setminus D_\alpha$. Le logarithme est donc bien défini de manière unique et holomorphe si on se restreint à une application de D_α sur B_α. On l'appelle alors la détermination α du logarithme :

$$(log)_\alpha(z) = \ln(|z|) + i\left(arg(z) + 2k\pi\right),$$

où k est l'unique entier tel que $\alpha < arg(z) + 2k\pi < \alpha + 2\pi$. Quand on prend $\alpha = -\pi$ on obtient la **détermination principale du logarithme**.

7.1.6. les radicaux. — La fonction puissance $f(z) = z^n$ où n est un entier ≥ 1 est une fonction entière surjective sur $\mathbb{C}$. Mais cette fonction n'est pas injective. Soit C_0 la partie de $\mathbb{C}$ constituée par les complexes $z = \rho e^{i\theta}$ tels que $\rho > 0$ et $0 < \theta < \frac{2\pi}{n}$, alors la fonction f restreinte à C_α est une bijection de l'ouvert C_0 sur l'ouvert $\mathbb{C} \setminus D_0$ où D_0 est la demi-droite ouverte $z > 0$. La bijection réciproque constitue une détermination du radical n^e.

8. La théorie de Cauchy

8.1. Intégration sur les chemins et les systèmes de chemins. —

Définition 8.1. — Un **chemin** de $\mathbb{C}$ est une application γ d'un intervalle fermé $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ qui est continue et différentiable par morceaux et de dérivée continue sur les morceaux. $\gamma(a)$ est l'origine du chemin et $\gamma(b)$ son extrémité. Si $\gamma(a) = \gamma(b)$ on dit que le chemin est un **lacet**. L'image de $[a, b]$ par γ est le **support** de γ.

Remarquons que le support de γ est un **compact**. Remarquons aussi que γ n'est pas nécessairement injective. Autrement dit certains points du support peuvent être atteints plusieurs fois. En conséquence il faudra veiller à ne pas confondre γ et son support.

Exemple 8.2. — Voici quelques exemples utiles de lacets :

– **cercle unité parcouru** n **fois**. On pose pour $t \in [0, 1]$,

$$\gamma(t) = e^{2i\pi nt}.$$

Le support de γ est le cercle unité. L'origine est le point $A = (1, 0)$ l'extrémité est ce même point A. Chaque point du support distinct de l'origine et de l'extrémité est atteint exactement n fois.

– **Segment parcouru** 2 **fois** . On pose

$$\gamma(t) = \begin{cases} (1-2t)z_0 + 2tz_1 & si \quad t \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2(1-t)z_1 + 2(t-\frac{1}{2})z_0 & si \quad t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Le support de γ est le segment qui joint z_0 et z_1. Ce segment est parcouru une première fois de z_0 à z_1 lorsque $t \in [0, \frac{1}{2}]$, puis une deuxième fois de z_1 à z_0 lorsque $t \in [\frac{1}{2}, 1]$.

– **bord orienté d'un rectangle**. Considérons un rectangle dont les sommets ont pour coordonnées

$$z_0 = x_0 + iy_0 \quad z_1 = x_0 + h + iy_0,$$

$$z_2 = x_0 + h + i(y_0 + k) \quad z_3 = x_0 + i(y_0 + k).$$

On considère l'application γ définie par

$$\gamma(t) = \begin{cases} (1-4t)z_0 + 4tz_1 & si \quad t \in [0, \frac{1}{4}] \\ (2-4t)z_1 + (4t-1)z_2 & si \quad t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ (3-4t)z_2 + (4t-2)z_3 & si \quad t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ (4-4t)z_3 + (4t-3)z_0 & si \quad t \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}$$

L'image de γ est le bord du rectangle (z_0, z_1, z_2, z_3) et le lacet correspondant est le bord de ce rectangle parcouru une fois dans le sens indiqué.

– **bord d'un compact réticulé**. On utilise parfois le bord d'un compact réticulé (compact construit par assemblage de rectangles contigus).

Définition 8.3. — Soit γ un chemin défini sur le segment $[a, b]$. On appelle **chemin opposé** à γ et on note $(-\gamma)$ le chemin défini sur $[a, b]$ par $\gamma(a + b - t)$.

On voit que l'origine de γ est l'extrémité de $(-\gamma)$ et que l'extrémité de γ est l'origine de $(-\gamma)$.

Définition 8.4. — Soit γ_1 un chemin défini sur $[a, b]$ et γ_2 un chemin défini sur $[c, d]$. Ces deux chemins sont dits **équivalents** s'il existe une bijection croissante ϕ de $[a, b]$ sur $[c, d]$ qui est continue dérivable par morceaux et de dérivée continue sur les morceaux ainsi que ϕ^{-1} de telle sorte que $\gamma_1(t) = \gamma_2\Big(\phi(t)\Big)$.

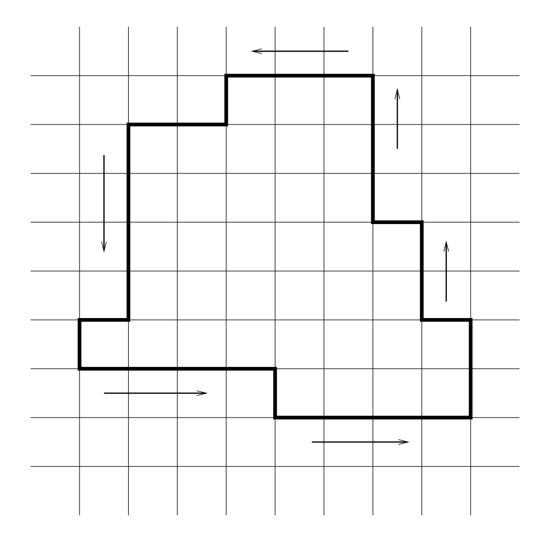


FIGURE 1. Compact réticulé

Une telle relation entre les chemins est visiblement une **relation d'équivalence**.

Définition 8.5. — Soit γ un chemin défini sur $[a, b]$ de support Γ et f une fonction continue sur Γ. On note

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{a}^{b} f\Big(\gamma(t)\Big)\gamma'(t)dt$$

l'intégrale de f sur le chemin γ.

Cette notion d'intégrale recouvre la notion mécanique de travail (on intègre un vecteur d'affixe $f(z)$ sur un chemin). Elle est donc à mettre en rapport avec la notion d'intégrale curviligne et de circulation. En outre la relation d'équivalence entre chemins est bien adaptée à cette notion d'intégrale et correspond à un changement de paramétrage.

On montre facilement que

$$\int_{-\gamma} f(z)dz = -\int_{\gamma} f(z)dz$$

et que si γ_1 et γ_2 sont deux chemins équivalents

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

Définition 8.6. — Soit n chemins $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$. On appelle intégrale de f sur le système γ de ces n chemins le nombre

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \cdots + \int_{\gamma_n} f(z)dz.$$

On notera par la suite

$$\gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_n$$

le signe + n'ayant pas ici le sens de l'addition des fonctions.

Exemple 8.7. — Considérons le bord ∂K d'un compact réticulé K. Définissons proprement ces notions. Soit

$$Q_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z = \frac{p}{2^n} + i\frac{q}{2^n}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}\}.$$

Le carré élémentaire $R^n_{p,q}$ du quadrillage Q_n sera le carré dont les sommets sont les points

$$\frac{p}{2^n} + i\frac{q}{2^n}, \frac{p+1}{2^n} + i\frac{q}{2^n}, \frac{p+1}{2^n} + i\frac{q+1}{2^n}, \frac{p}{2^n} + i\frac{q+1}{2^n}.$$

Un compact K est dit réticulé, s'il existe un quadrillage Q_n et un sous ensemble fini $A \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ tel que

$$K = \bigcup_{(p,q)\in A} R^n_{p,q}.$$

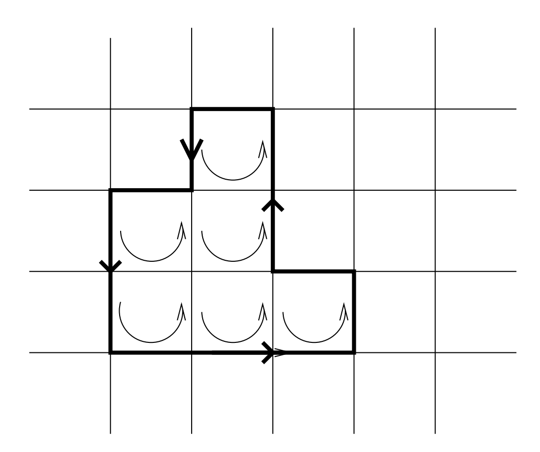


FIGURE 2. Bord d'un compact réticulé

Remarquons qu'un segment élémentaire du quadrillage (horizontal ou vertical) vérifie une des propriétés suivantes

(1) il n'appartient à aucun rectangle élémentaire constituant le compact,
(2) il appartient à un seul rectangle élémentaire constituant le compact et dans ce cas il constitue un segment élémentaire du bord de K,
(3) il appartient à deux rectangles élémentaires du compact.

Soit $\gamma^n_{p,q}$ le lacet "bord orienté" du rectangle $R^n_{p,q}$ parcouru une fois, orienté dans le sens trigonométrique. Le chemin

$$\gamma = \sum_{(p,q)\in A} \gamma^n_{p,q}$$

est le lacet constituant le bord ∂K du compact réticulé K parcouru une fois dans le sens trigonométrique (seuls les segments du bord interviennent puisque ceux qui sont communs à deux rectangles élémentaires de K sont parcourus deux fois, une fois dans un sens, une fois dans l'autre sens et donc s'éliminent).

Remarque 8.8. — On peut définir l'intégrale sur un lacet d'une forme différentielle de la même façon qu'on l'a fait pour la forme différentielle particulière $f(z)dz$. Pour cela, si on note $\omega = Pdx + Qdy$, alors on définit

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \Big(P\left(\gamma(t)\right) x'(t) + Q\left(\gamma(t)\right) y'(t) \Big) dt,$$

où

$$x'(t) = \mathcal{R}e\left(\gamma'(t)\right) \quad y'(t) = \mathcal{I}m\left(\gamma'(t)\right).$$

Si on écrit ω sous la forme $\omega = f_1 dz + f_2 d\bar{z}$ alors l'intégrale s'écrit

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b f_1\left(\gamma(t)\right)\gamma'(t)dt + \int_a^b f_2\left(\gamma(t)\right)\overline{\gamma'(t)}dt$$

8.2. Premières propriétés des fonctions holomorphes. — Nous nous proposons ici tout d'abord de voir dans quelles conditions une fonction f est dérivée complexe d'une fonction F (qui sera alors par définition holomorphe).

Proposition 8.9. — *Soit γ un lacet de support Γ. Si f est la dérivée d'une fonction holomorphe dans un voisinage de Γ alors*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Démonstration. — Supposons que f soit la dérivée de la fonction holomorphe F. On a alors

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$
$$= \left[F\left(\gamma(t)\right)\right]_a^b = F\left(\gamma(b)\right) - F\left(\gamma(a)\right) = 0$$

□

Remarque 8.10. — En toute rigueur, on ne peut parler de γ' que sur des morceaux $[x_i, x_{i+1}]$ du compact $[a, b]$. Mais quitte à calculer les intégrales sur le segment $[a, b]$ en sommant les intégrales sur les morceaux on voit que tout se passe comme si γ était de classe C^1 sur $[a, b]$. En effet on sait que γ est continue sur $[a, b]$ et C^1 sur les morceaux $[x_{i-1}, x_i]$ où

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Alors

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} F'(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Mais pour tout i on a

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} F'(\gamma(t))\gamma'(t)dt = F\left(\gamma(x_i)\right) - F\left(\gamma(x_{i-1})\right).$$

Donc

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{i=1}^n \left(F\left(\gamma(x_i)\right) - F\left(\gamma(x_{i-1})\right)\right) = F\left(\gamma(b)\right) - F\left(\gamma(a)\right) = 0.$$

Désormais on utilisera sans le dire cet abus et on travaillera directement sur le segment entier $[a, b]$.

Proposition 8.11. — *Soit Ω l'intérieur d'un rectangle et f une fonction continue sur Ω telle que*

$$\int_{\partial R} f(z)dz = 0.$$

pour tout rectangle fermé R contenu dans Ω. Alors f est la dérivée d'une fonction holomorphe dans Ω.

Démonstration. — Supposons que $0 \in \Omega$. Soit $z = x+iy \in \Omega$. Notons R_z le rectangle défini par ses sommets $z_0 = 0, z_1 = x, z_2 = z = x+iy, z_3 = iy$. On note γ le lacet "bord du rectangle" parcouru une fois dans le sens $(z_0, z_1, z_2, z_3, z_0)$ qui a été défini dans l'exemple (8.2). Puis on note

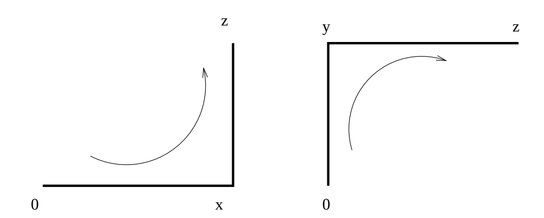


FIGURE 3. Les chemins γ_1 et γ_2

$\gamma_1 = \gamma_{|\ [0,1/2]}$, $\gamma_2 = -\gamma_{|\ [1/2,1]}$. Par hypothèse

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

Notons $F(z)$ la valeur commune de ces deux intégrales :

$$F(z) = \int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_0^x f(u)du + i\int_0^y f(x+iv)dv,$$
$$F(z) = \int_{\gamma_2} f(z)dz = i\int_0^y f(iv)dv + \int_0^x f(u+iy)du.$$

Comme f est continue on peut dériver les intégrales par rapport à leur borne supérieure et on obtient à partir de la première relation donnant $F(z)$:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = if(x+iy),$$

et à partir de la deuxième relation donnant $F(z)$:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f(x+iy).$$

On voit donc que les dérivées partielles de F sont continues et donc que F est $\mathbb{R}$-différentiable. De plus

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}(z) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial F}{\partial x}(z) + i\frac{\partial F}{\partial y}(z)\Big) = 0,$$

donc F est holomorphe d'après le théorème 6.5. En outre, il est clair que

$$F'(z) = f(z).$$

Remarquons que d'avoir considéré que $0 \in \Omega$ n'enlève rien à la généralité du résultat. □

Nous allons essayer de voir maintenant quelles sont les fonctions qui vérifient les hypothèses de cette dernière proposition.

Remarquons que la combinaison des deux propositions précédentes implique que s'il existe un lacet γ de l'intérieur Ω du rectangle donné tel que

$$\int_\gamma f(z)dz \neq 0$$

alors il existe un rectangle R de Ω tel que

$$\int_{\partial R} f(z)dz \neq 0.$$

***Proposition 8.12* (Théorème de Cauchy pour un rectangle)**

Soit R un rectangle, f une fonction holomorphe dans un voisinage de R. Alors

$$\int_{\partial R} f(z)dz = 0.$$

Démonstration. — Soit ∂R le lacet bord du rectangle R, posons :

$$I = \int_{\partial R} f(z)dz.$$

On va découper le rectangle R en 4 rectangles R_1, R_2, R_3, R_4. Remarquons

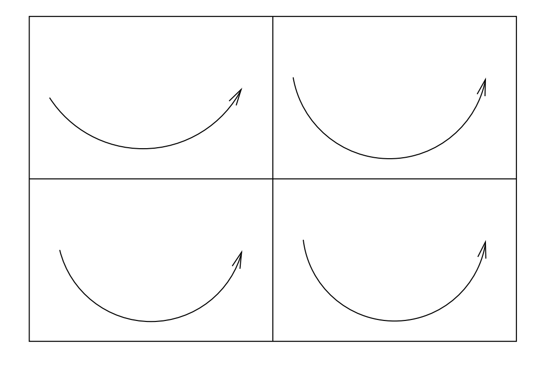


FIGURE 4. Découpage d'un rectangle

que

$$I = \sum_{i=1}^{4} \int_{\partial R_i} f(z)dz.$$

Choisissons un indice $1 \leq i \leq 4$ réalisant le maximum des valeurs

$$\left| \int_{\partial R_i} f(z)dz \right|,$$

et notons R^1 le rectangle R_i correspondant. On répète la construction que l'on vient de faire sur R à partir de R^1, et on définit ainsi par récurrence une suite R^n de rectangles emboîtés. Remarquons que par construction on a

$$\left| \int_{\partial R^1} f(z)dz \right| \geq \frac{|I|}{4},$$

et par récurrence

$$\left| \int_{\partial R^n} f(z)dz \right| \geq \frac{|I|}{4^n}. \tag{2}$$

De plus l'intersection des R^n est réduite à un point (compacts emboîtés) :

$$\bigcap_{n>0} R^n = \{z_0\}.$$

Écrivons que f est holomorphe en z_0 :

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \epsilon(z)(z - z_0),$$

où

$$\lim_{z \to z_0} \epsilon(z) = 0.$$

On obtient donc par intégration sur le bord de R^n :

$$\int_{\partial R^n} f(z)dz = \int_{\partial R^n} \big(f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)\big)\, dz + \int_{\partial R^n} \epsilon(z)(z - z_0)dz.$$

Or $f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$ est la dérivée d'une fonction holomorphe donc son intégrale est nulle sur le lacet ∂R^n. Remarquons que si on définit $\epsilon(0) = 0$ la fonction ϵ est continue sur R^n. Notons alors ϵ_n la borne supérieure de $|\epsilon(z)|$ sur le compact R^n. On peut alors écrire :

$$\left| \int_{\partial R^n} f(z)dz \right| \leq \epsilon_n \left| \int_{\partial R^n} (z - z_0)dz \right|.$$

Si L est le périmètre de R, alors le périmètre de R^n est $\frac{L}{2^n}$ si bien que :

$$\left|\int_{\partial R^n} f(z)dz\right| \leq \frac{L\epsilon_n}{2^n} \sup_{z\in R^n} |z - z_0| \leq \frac{L^2\epsilon_n}{4^n}.$$

En comparant avec l'inégalité (2) on obtient pour tout n :

$$I \leq \epsilon_n L^2.$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \epsilon_n = 0$ on conclut que $I = 0$. □

Des résultats précédents on déduit immédiatement la proposition suivante

Proposition 8.13. — *Soit Ω l'intérieur d'un rectangle et f une fonction holomorphe sur Ω. Alors f admet une primitive dans Ω.*

Corollaire 8.14. — *Toute fonction holomorphe f dans un ouvert Ω est localement une fonction dérivée, c'est-à-dire que pour tout $z_0 \in \Omega$ il existe un voisinage V de z_0 et une fonction F tels que dans V on ait $F'(z) = f(z)$.*

Remarquons que dans le cas général si on peut conclure que la fonction f holomorphe dans Ω est localement une fonction dérivée, on ne peut pas conclure que f admet une primitive dans tout Ω. Prenons comme exemple $\Omega = \mathbb{C} - \{0\}$ et $f(z) = 1/z$. Soit alors le lacet γ définie sur $[0, 1]$ par $\gamma(t) = exp(2i\pi t)$. Alors

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2i\pi \neq 0$$

et donc en vertu d'une proposition précédente, f n'est pas dérivée d'une fonction holomorphe dans un voisinage de γ. Toutefois nous verrons par la suite que si Ω possède certaines propriétés alors f admet des primitives dans Ω.

8.3. Indice d'un point par rapport à un lacet. — Soit γ un lacet (ou un système de lacets) de support Γ et $z_0 \notin \Gamma$.

Définition 8.15. — On appelle indice de z_0 par rapport à γ

$$\mathrm{ind}(z_0, \gamma) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0}.$$

Proposition 8.16. — $\operatorname{ind}(z_0, \gamma) \in \mathbb{Z}$

Démonstration. — Soit γ défini sur $[a, b]$ le lacet considéré. Posons pour $t \in [a, b]$:

$$\phi(t) = e^{\int_a^t \frac{\gamma'(u)}{\gamma(u)-z_0}du}.$$

Alors

$$\frac{\phi'(t)}{\phi(t)} = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0}$$

sauf peut être en un nombre fini de points de discontinuité de γ'. On voit que la relation obtenue s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\phi(t)}{\gamma(t) - z_0}\right) = 0,$$

sauf peut être en un nombre fini de points, ce qui montre que la fonction :

$$\frac{\phi(t)}{\gamma(t) - z_0}$$

est constante par morceaux. De plus cette fonction est continue donc elle est constante et égale à :

$$\frac{\phi(a)}{\gamma(a) - z_0} = \frac{1}{\gamma(a) - z_0},$$

ce qui prouve que :

$$\phi(t) = \frac{\gamma(t) - z_0}{\gamma(a) - z_0}.$$

Comme $\gamma(a) = \gamma(b)$ on a :

$$\phi(b) = e^{2i\pi \operatorname{ind}(z,\gamma)} = 1,$$

et par conséquent, $\operatorname{ind}(z, \gamma) \in \mathbb{Z}$. □

Proposition 8.17. — *L'application g définie sur le complémentaire du support Γ du lacet γ par*

$$g(z) = \operatorname{ind}(z, \gamma) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z}$$

est constante sur les composantes connexes du complémentaire de Γ et nulle sur celle qui est non bornée.

Démonstration. — Sur une composante connexe du complémentaire de Γ il est aisé de voir que $\mathrm{ind}(z, \gamma)$ est une fonction continue. Comme $\mathrm{ind}(z, \gamma)$ ne prend que des valeurs entières, nécessairement $\mathrm{ind}(z, \gamma)$ est constant sur la composante connexe considérée.

Remarquons que puisque Γ est un compact de $\mathbb{C}$, donc fermé borné, Γ est inclus dans un disque D. Tous les points extérieurs à ce disque sont donc dans la même composante connexe du complémentaire de Γ. Les autres composantes connexes sont dans le disque D. En conséquence, il n'existe qu'une composante connexe non bornée du complémentaire de Γ. Nous allons montrer que sur cette composante connexe l'indice est nul.

En effet, pour tout $\epsilon > 0$ il existe R tel pour tout $|z| > R$ on ait :

$$\sup_{t \in [a,b]} \left| \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} \right| < \epsilon,$$

donc :

$$\left| \int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z} \right| = \left| \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} dt \right| \leq (b - a)\epsilon.$$

Ceci prouve que :

$$\lim_{z \to \infty} \mathrm{ind}(z, \gamma) = 0,$$

et donc, puisque $\mathrm{ind}(z, \gamma)$ est entier et constant sur toute la composante connexe, que $\mathrm{ind}(z, \gamma) = 0$. □

Remarque 8.18. — On peut donner une autre démonstration de ce résultat de la façon suivante : on peut trouver z_0 appatenant à la composante non bornée de Γ de telle sorte que z_0 et Γ soient dans deux demi-plans ouverts différents par rapport à une droite D. Alors il existe dans un voisinage de γ une détermination continue du logarithme de $z - z_0$. En conséquence :

$$\int_\gamma \frac{dz}{z - z_0} = [\log_\alpha(z - z_0)]_\gamma = 0.$$

8.4. Théorème et formule de Cauchy. — Les résultats fondamentaux de la théorie sont le théorème de Cauchy et la formule de Cauchy. Ce sont ces résultats que nous présentons dans ce paragraphe.

Théorème 8.19. — *Soit K un compact réticulé construit sur un quadrillage Q_n, z_0 un point intérieur à K et f une fonction holomorphe dans un ouvert contenant K. Alors*

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial K} \frac{f(\omega)}{\omega - z_0} d\omega.$$

Démonstration. — Soit $z_0 = x + iy \in K \setminus \partial K$. Soit m un entier tel que $d(z_0, \partial K) > \frac{1}{2^{m-2}}$. On pose $r = \max(n, m)$. Alors K est aussi un compact réticulé construit sur le quadrillage Q_r. Grâce au chois de m, il existe deux entiers p et q tel que z_0 appartienne à la réunion R_r des 4 carré $R^r_{p,q}$, $R^r_{p+1,q}$, $R^r_{p,q+1}$, $R^r_{p+1,q+1}$, ces 4 carrés étant inclus dans $K \setminus \partial K$. Posons $K_r = K \setminus R_r$. La fonction $\frac{f(w)}{w-z_0}$ est holomorphe dans un ouvert contenant K_r. Remarquons que K_r est lui-même un compact réticulé sur Q_r et que :

$$\int_{\partial K_r} \frac{f(w)}{w - z_0} dw = \sum_{(i,j)\in A} \int_{\partial R^r_{i,j}} \frac{f(w)}{w - z_0} dw,$$

où A est tel que $\cup_{(i,j)\in A} R^r_{i,j} = K_r$. Mais on sait d'après le théorème 8.12 que :

$$\int_{\partial R^r_{i,j}} \frac{f(w)}{w - z_0} dw = 0,$$

donc :

$$\int_{\partial K_r} \frac{f(w)}{w - z_0} dw = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\int_{\partial K} \frac{f(w)}{w - z_0} dw - \int_{\partial R_r} \frac{f(w)}{w - z_0} dw = 0.$$

Soit maintenant

$$J_r = \int_{\partial R_r} \frac{f(w) - f(z_0)}{w - z_0} dw.$$

On a par holomorphie de f :

$$\frac{f(w) - f(z_0)}{w - z_0} = f'(z_0) + \epsilon(w - z_0)$$

où $\lim_{w\to z_0} \epsilon(w-z_0) = 0$. Il s'en suit que $\lim_{r\to\infty} J_r = 0$. Mais par ailleurs :

$$\int_{\partial K} \frac{f(w)}{w - z_0} dw = J_r + f(z_0) \int_{\partial R_r} \frac{dw}{w - z_0}$$
$$= 2i\pi\, f(z_0) \operatorname{ind}(\partial R_r, z_0) = J_r + 2i\pi f(z_0),$$

ce qui donne en passant à la limite en r :

$$\int_{\partial K} \frac{f(w)}{w - z_0} dw = 2i\pi f(z_0).$$

□

***Théorème 8.20* (Théorème de Cauchy).** — *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{C}$*,* γ *un système de lacets dont les supports sont contenus dans* Ω*. On suppose que l'ouvert* Ω *contient le complémentaire de l'ensemble des points* z *tels que* $\mathrm{ind}(z, \gamma) = 0$*. Soit* f *une fonction holomorphe sur* Ω *alors*

$$\int_\gamma f(z) dz = 0.$$

Démonstration. — Soit $d = d\big(K, \complement\Omega\big)$ la distance du compact K au fermé complémentaire de Ω disjoint de K. Cette distance est donc strictement positive. Soit n tel que $\frac{1}{2^n} < \frac{d}{2}$. Considérons le quadrillage Q_n de $\mathbb{C}$. Notons K_n la réunion de tous les carrés élémentaires du quadrillage Q_n qui coupent K. Alors $K_n \subset \Omega$ et le support Γ de γ vérifie $\Gamma \subset \mathring{K}_n$. Donc pour tout $z \in \Gamma$ on a :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial K_n} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

ce qui donne successivement :

$$\int_\gamma f(z) dz = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_{\partial K_n} \frac{f(w)}{w - z} dw\, dz$$

$$\int_\gamma f(z) dz = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial K_n} \left(\int_\gamma \frac{dz}{w - z} \right) f(w) dw$$

$$\int_\gamma f(z) dz = - \int_{\partial K_n} \mathrm{ind}(w, \gamma) f(w) dw.$$

Par hypothèse, si $w' \in \complement\Omega$ l'indice de w' par rapport au lacet γ est nul. Comme $\gamma \subset \mathring{K}_n$ l'indice $\mathrm{ind}(z, \gamma)$ est constant sur le complémentaire de $\mathring{K}_n$ puisque $\complement\mathring{K}_n$ est inclus dans une composante connexe du complémentaire du support de γ. Or on a :

$$\complement\Omega \cap \complement\mathring{K}_n \neq \emptyset,$$

par conséquent pour tout $z \in \complement \overset{\circ}{K}_n$ on a $\mathrm{ind}(z,\gamma) = 0$, ceci a lieu en particulier pour tout $w \in \partial K_n$ et par suite :

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

□

Théorème 8.21 **(Formule de Cauchy)**. — *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{C}$, γ *un système de lacets dont les supports sont contenus dans* Ω. *On suppose que l'ouvert* Ω *contient le complémentaire de l'ensemble des points* z *tels que* $\mathrm{ind}(z,\gamma) = 0$. *Soit* f *une fonction holomorphe sur* Ω *et* z_0 *un point de* Ω *qui n'est pas sur le support de* γ. *Alors*

$$f(z_0)\mathrm{ind}(z_0,\gamma) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(\omega)}{\omega - z_0}d\omega.$$

Démonstration. — Définissons $\gamma'_\epsilon = \gamma + C_{n,\epsilon}$ où

$$\begin{array}{rcccl} C_{n,\epsilon} & : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & & t & \longmapsto & z_0 + \epsilon\, e^{2i\pi nt} \end{array}$$

et où $n = -\mathrm{ind}(z_0,\gamma)$. Alors $\mathrm{ind}(z_0,\gamma'_\epsilon) = 0$. Posons $\Omega' = \Omega \setminus \{z_0\}$. Pour ϵ suffisamment petit Ω' contient Γ'_ϵ support de γ'_ϵ et Ω' contient $\complement\{z \mid \mathrm{ind}(z,\gamma'_\epsilon) = 0\}$.

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}dz - \mathrm{ind}(z_0,\gamma)\, f(z_0) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}dz - \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z_0)}{z - z_0}dz.$$

Étudions alors :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma'_\epsilon} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}dz.$$

On peut appliquer le théorème précédent :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma'_\epsilon} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}dz = 0,$$

ce qui nous permet d'écrire :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}dz = -\frac{1}{2i\pi}\int_{C_{n,\epsilon}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}dz.$$

Mais

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{C_{n,\epsilon}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}dz = \int_0^1 \left(f(z_0 + \epsilon\, e^{2i\pi nt}) - f(z_0)\right) 2i\pi n dt.$$

On remarque que :

$$\lim_{\epsilon \to 0} \epsilon \, e^{2i\pi nt} = 0$$

et que cette limite est uniforme en t. En conséquence :

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\gamma'_\epsilon} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = 0,$$

ce qui achève la démonstration. □

Donnons ici la définition suivante qui décrit les ouverts connexes “sans trous”.

Définition 8.22. — Un ouvert connexe Ω de $\mathbb{C}$ est dit simplement connexe si pour tout lacet (ou système de lacets) γ de support dans Ω, et pour tout point a qui n'est pas dans Ω, l'indice du point a par rapport à γ est nul.

On peut montrer que :

Proposition 8.23. — *Tout ouvert convexe est simplement connexe. Tout ouvert Ω étoilé par rapport à un point x (c'est-à- dire que pour tout $y \in \Omega$ le segment $[y, x]$ est inclus dans Ω) est simplement connexe.*

Dans les deux théorèmes centraux (Théorème de Cauchy et Formule de Cauchy), l'hypothèse Ω **contient le complémentaire de l'ensemble des points** z **tels que** $\mathrm{ind}(z, \gamma) = 0$ est réalisée en particulier si l'ouvert Ω est **simplement connexe**, ce qui est en particulier le cas s'il est **convexe** ou s'il est **étoilé par rapport à un point**.

9. La théorie de Weierstrass

9.1. Identification des fonctions analytiques et des fonctions holomorphes. — Le point de vue de Weierstrass pour l'étude des fonctions d'une variable complexe est le point de vue des fonctions analytiques, c'et-à-dire l'étude à partir du développement en série entière des fonctions. Nous allons étudier ce point de vue et montrer qu'il s'identifie à celui de Cauchy, c'est-à-dire qu'on va identifier fonctions analytiques et fonctions holomorphes.

Définition 9.1. — Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une application de U dans $\mathbb{C}$. La fonction f est dite analytique dans U si pour tout point $z \in U$, f est développable en série entière autour du point z.

On sait que f est développable en série entière autour d'un point z_0 est équivalent à : il existe un ouvert U contenant z_0 tel que f est analytique dans U. On a déjà vu que si f est développable en série entière, elle est dérivable, donc : si f est analytique dans U alors elle est holomorphe dans U. On va voir la réciproque :

Théorème 9.2. — *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe dans U. Alors f est analytique dans U.*

Démonstration. — Soit $a \in U$ et $0 < \rho < d(a, \complement U)$. Soit $C_{(0,\rho)}$ le chemin défini sur $[0, 2\pi]$ par

$$C_{(0,\rho)}(t) = a + \rho\, e^{it}.$$

On est alors sous les hypothèses d'application de la formule de Cauchy, c'est-à-dire que pour tout z tel que $|z - a| < \rho$ on a :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(a,\rho)} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Mais

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w - a - (z - a)} = \frac{1}{w - a} \times \frac{1}{1 - \frac{z-a}{w-a}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}$$

et cette dernière série converge uniformément par rapport à $w \in C_{(a,\rho)}([0, 1])$. Donc on peut écrire :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(a,\rho)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}} f(w) dw$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^n \frac{1}{2i\pi} \int_{C(a,\rho)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw.$$

Si on pose :

$$c_n(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(a,\rho)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw$$

alors pour tout z tel que $|z-a| < \rho$ on a le développement

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(a)(z-a)^n.$$

□

Remarque 9.3. — On vient donc de montrer que si f est holomorphe dans U alors elle est analytique dans U.

On voit aussi une propriété remarquable des fonctions holomorphes : si f est holomorphe dans U alors f est indéfiniment dérivable, et donc toutes les dérivées sont holomorphes dans U.

On peut écrire

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(p)}(a)}{p!}(z-a)^p,$$

avec

$$f^{(p)}(a) = \frac{p!}{2i\pi} \int_{C(a,\rho)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw.$$

Puisque la fonction dérivée d'ordre n d'une fonction holomorphe est holomorphe, on peut écrire une formule de Cauchy pour cette fonction, cette formule prend alors une forme particulière :

***Théorème 9.4* (Formule de Cauchy pour une dérivée)**

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, γ un système de lacets dont les supports sont contenus dans Ω. On suppose que l'ouvert Ω contient le complémentaire de l'ensemble des points z tels que $\operatorname{ind}(z,\gamma) = 0$. *Soit f une fonction holomorphe sur Ω et z_0 un point de Ω qui n'est pas sur le support de γ. Alors*

$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \operatorname{ind}(z_0,\gamma) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(\omega)}{(\omega - z_0)^{n+1}} d\omega.$$

Démonstration. — On applique la formule de Cauchy à la fonction holomorphe $f^{(n)}$, ce qui donne :

$$f^{(n)}(z_0) \operatorname{ind}(z_0,\gamma) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f^{(n)}(z)}{z - z_0} dz.$$

En utilisant des intégrations par partie successives de l'intégrale du second membre on obtient le résultat voulu. □

En examinant la démonstration du théorème 9.2 on constate que si f est une fonction holomorphe dans un ouvert U et si $a \in U$, alors f est développable au voisinage de a à l'aide d'une série entière de rayon de convergence $R \geq d(a, \complement U)$. En particulier si f est holomorphe dans $\mathbb{C}$ tout entier on peut écrire (pour tout $a \in \mathbb{C}$)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(a)(z-a)^n,$$

la série ayant un rayon de convergence infini. Bien entendu les coefficients $c_n(a)$ dépendent du point a autour duquel on développe en série entière.

Faisons une synthèse des résultats sur l'identification des fonctions analytiques et des fonctions holomorphes :

Théorème 9.5. — *Les trois propositions suivantes sont équivalentes :*

(a) la fonction f est développable en série entière autour du point z_0 ;
(b) il existe un ouvert U contenant z_0 tel que f soit analytique dans U ;
(c) il existe un ouvert U contenant z_0 tel que f soit holomorphe dans U.

Démonstration. — On sait que la somme d'une série entière est dérivable sur son disque ouvert de convergence. Donc la propriété (a) implique la proprété (c). Par ailleurs le théorème 9.2 dit que la propriété (b) est équivalente à la propriété (c). On en conclut que (a) implique (b). Mais par définition de la notion de fonction analytique on sait que (b) implique (a). On conclut à l'équivalence de ces trois propriétés. □

9.2. Quelques conséquences de l'identification. — Écrivons maintenant quelques conséquences simples des résultats précédents :

Théorème 9.6. — *Soit $f : U \to \mathbb{C}$ et $g : V \to \mathbb{C}$ deux fonctions analytiques. On suppose que $V \subset f(U)$. Alors la composée $g \circ f : U \to \mathbb{C}$ est analytique dans U.*

Démonstration. — Le résultat provient de l'holomorphie de la composée de deux fonctions holomorphes, compte tenu de l'identification entre fonctions holomorphes et fonctions analytiques. □

Théorème 9.7 **(Théorème de Morera)**. — *Soit R_0 un rectangle ouvert et f une fonction continue complexe définie sur R_0. Si pour tout rectangle fermé R inclus dans R_0 on a :*

$$\int_{\partial R} f(z)dz = 0,$$

alors f est holomorphe dans R_0.

Démonstration. — Sous les hypothèses de ce théorème on peut appliquer le théorème 8.11 qui conclut que f est la dérivée d'une fonction holomorphe. Mais on sait que la dérivée d'une fonction holomorphe est elle-même holomorphe. □

10. Inégalités de Cauchy - Applications

10.1. Inégalités de Cauchy. —

Théorème 10.1. — *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, f une fonction holomorphe dans U et a un point de U. Soit ρ un nombre réel tel que $0 < \rho < d(a, \complement U)$ et $M = \sup_{t\in[0,2\pi]} |f(a + \rho e^{it})|$. Alors on a l'inégalité suivante appelée inégalité de Cauchy :*

$$\left|f^{(n)}(a)\right| \leq \frac{M\, n!}{\rho^n}.$$

Démonstration. — Il suffit en reprenant les notations du paragraphe précédent d'écrire :

$$c_n(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(a,\rho)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}, dw$$

en remarquant que pour l'intégration on peut prendre $w = a + \rho e^{it}$, $(w-a)^n = \rho^n e^{int}$, $\frac{dw}{w-a} = idt$ on obtient :

$$c_n(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{it}) \rho^{-n} e^{-int} dt, \tag{3}$$

puis :

$$\left|f^{(n)}(a)\right| = n! \left|c_n(a)\right| \leq \frac{M\, n!}{\rho^n}.$$

□

10.2. Application aux fonctions entières. —

***Théorème 10.2* (Théorème de Liouville).** — *Une fonction entière (fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier) bornée est constante.*

Démonstration. — La fonction entière f est developpable en série entière de rayon de convergence ∞ au voisinage de 0 (par exemple) :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n.$$

Posons $M = \sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z|$. Par hypothèse $M < +\infty$. En vertu de l'inégalité de Cauchy on a pour tout $\rho > 0$ la relation :

$$|c_n| \leq lim_{\rho \to \infty} \frac{M}{\rho^n},$$

par suite si $n \neq 0$ on a $c_n = 0$ ce qui prouve que $f(z) = c_0$. □

Plus généralement on a le résultat suivant :

***Théorème 10.3*.** — *Si f est une fonction entière telle qu'il existe un entier n pour lequel $|f(z)| = O(|z|^n))$ au voisinage de l'infini, alors f est un polynôme de degré $\leq n$.*

Démonstration. — Posons $M(\rho) = \sup_{|z|=\rho} |f(z)|$. Par hypothèse $M(\rho) = O(\rho^n)$. D'après l'inégalité de Cauchy, on a pour tout $m \geq 0$ et tout ρ l'inégalité

$$c_m \leq \frac{M(\rho)}{\rho^m}.$$

Si $m > n$ on obtient :

$$\lim_{\rho \to \infty} \frac{M(\rho)}{\rho^m} = 0,$$

ce qui prouve que pour $m > n$ le coefficient c_m est nul. □

Grâce à l'inégalité de Cauchy on obtient une démonstration très élégante de théorème de d'Alembert.

***Théorème 10.4*.** — *Soit $P \in \mathbb{C}[Z]$ un polynôme non constant. Alors il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que $P(a) = 0$.*

Démonstration. — Remarquons tout d'abord que si P est un polynôme non constant alors $\lim_{|z|\to+\infty} |P(z)| = +\infty$. Supposons que $P(z)$ ne s'annule pas. Alors la fonction $\frac{1}{P(z)}$ est une fonction entière. Mais $\lim_{|z|\to+\infty} \frac{1}{P(z)} = 0$, et donc $\frac{1}{P(z)}$ est une fonction bornée, donc constante en vertu du théorème de Liouville, ce qui contredit l'hypothèse. □

10.3. Zéros des fonctions holomorphes. —

Théorème 10.5. — *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, f une fonction holomorphe dans U. Soit a un point de U tel que $f(a) = 0$. Alors ou bien f est nulle dans tout un voisinage de a, ou bien il existe un voisinage de a dans lequel a est le seul zéro de f.*

Démonstration. — Il existe un voisinage $V(a)$ du point a tel que pour tout $z \in V(a)$ on ait le développement

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(a)(z-a)^n.$$

Si tous les $c_n(a)$ sont nuls, alors f est nulle sur $V(a)$, sinon soit m le premier indice tel que $c_m(a) \neq 0$. On peut écrire

$$f(z) = c_m(a)(z-a)^m \left(1 + \sum_{k>0} \frac{c_{m+k}(a)}{c_m(a)}(z-a)^k\right).$$

Or la fonction $1+\sum_{k>0} \frac{c_{m+k}(a)}{c_m(a)}(z-a)^k$ est continue et vaut 1 pour $z = a$. Il existe donc un voisinage $V'(a)$ de a dans lequel elle ne s'annule pas et d'autre part $(z-a)^m$ ne s'annule qu'au point a, donc dans $V(a) \cup V'(a)$, le point a est le seul zéro de f. □

Théorème 10.6. — *Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe dans U. Alors $f^{-1}(0)$ est ou bien U tout entier, ou bien un ensemble discret.*

Démonstration. — Soit F l'ensemble des points d'accumulation de $f^{-1}(\{0\})$. Alors F est fermé. Comme $f^{-1}(\{0\})$ est fermé on peut dire que $F \subset f^{-1}(\{0\})$. Soit $a \in F$, donc $a \in f^{-1}(\{0\})$, et d'après le théorème précédent, f est nulle dans un disque ouvert $D_{a,r}$ de centre a et de rayon $r > 0$. Il et clair que tout point de $D_{a,r}$ est un point d'accumulation de $f^{-1}(\{0\})$ si bien que $D_{a,r} \subset F$. En conséquence F est aussi ouvert. F

est donc ouvert et fermé dans l'ouvert connexe U, par suite $F = \emptyset$ ou $F = U$. Si $F = \emptyset$ alors $f^{-1}(\{0\})$ est discret. Sinon si $F = U$ on a aussi $f^{-1}(\{0\}) = U$ puisque $F \subset f^{-1}(\{0\})$. □

Corollaire 10.7. — *(***principe du prolongement analytique***) Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, E une partie non discrète de U.Soient f_1 et f_2 deux fonctions holomorphes sur U, qui coïncident sur E. Alors $f_1 = f_2$ sur U.*

Démonstration. — D'après le théorème précédent $(f_2 - f_1)^{-1}(\{0\}) = U$, ce qui prouve le résultat. □

10.4. Principe du maximum. — Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert U et $a \in U$. Écrivons le développement de f au voisinage du point a :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(a) z^n,$$

où $c_n(a)$ est donné par la formule (3) :

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{it}) \rho^{-n} e^{-int} dt.$$

En particulier pour $n = 0$ on obtient $f(a)$:

$$f(a) = c_0(a) = \int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{it}) dt,$$

c'est-à-dire que $f(0)$ est la moyenne des valeurs de f prises sur le cercle de centre a et de rayon ρ. Ce comportement est appelé **la propriété de moyenne** et n'est pas caractéristique des fonctions holomorphes, mais de la classe des fonctions harmoniques. Nous allons montrer que $|f|$ ne peut pas avoir de maximum en a à moins d'être constante.

Théorème 10.8 **(Principe du maximum)**. — *Soit f une fonction continue dans un ouvert $U \subset \mathbb{C}$ qui possède sur U propriété de moyenne (c'est le cas en particulier si f est holomorphe). Si $|f|$ possède en a un maximum relatif, c'est-à-dire s'il existe un voisinage $V(a)$ de a tel que $|f(z)| \leq |f(a)|$ pour tout $z \in V(a)$, alors f est constante dans un voisinage de a.*

Démonstration. — Si $f(a) = 0$ le résultat est clair par hypothèse faite sur $|f|$ dans le voisinage $V(a)$. Supposons donc maintenant $f(a) \neq 0$. Quitte à étudier la fonction $f(z)e^{-Arg\left(f(a)\right)}$ obtenue en multipliant f par la constante $e^{-Arg\left(f(a)\right)}$ à la place de $f(z)$, on peut supposer que $f(a) > 0$. La propriété de moyenne devient alors :

$$f(a) = \int_0^{2\pi} \mathcal{R}e\left(f(a + \rho e^{it})\right) dt. \tag{4}$$

Soit

$$M(\rho) = \sup_t |f(a + \rho e^{it})|.$$

La propriété de moyenne nous dit que $f(a) \leq M(\rho)$ alors que l'hypothèse nous dit que $M(\rho) \leq f(a)$ (pour ρ assez petit). En conclusion pour $\rho \leq \rho_0$ on a $f(a) = M(\rho)$. Considérons alors la fonction :

$$g(z) = \mathcal{R}e\left(f(a) - f(z)\right).$$

Cette fonction est ≥ 0 pour $\rho \leq \rho_0$. De plus si $g(z) = 0$ alors

$$f(a) = \mathcal{R}e\left(f(z)\right) \leq |f(z)|,$$

et comme $|f(z)| \leq f(a)$ on conclut que $|f(z)| = \mathcal{R}e\left(f(z)\right) = f(z)$, et encore $f(z) = f(a)$. D'après la formule (4) la valeur moyenne de $g(z)$ sur le cercle de centre a de rayon ρ est nulle, et comme $g(z) \geq 0$ sur ce cercle et est continue, on en déduit que $g(z) = 0$ sur le cercle en question. Mais ceci est vrai pour tout rayon $\rho \leq \rho_0$, ce qui achève la preuve. □

Corollaire 10.9. — *Soit U un ouvert connexe et f une fonction holomorphe dans U. Si $|f|$ admet un maximum relatif en un point $a \in U$, alors f est constante sur U.*

Démonstration. — En effet f est alors constante sur un voisinage de a. Le principe du prolongement analytique implique alors que f est constante sur U. □

PARTIE III
POINTS SINGULIERS DES FONCTIONS

Le problème qu'on se pose dans cette partie est le suivant. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et a un point de Ω. Soit f une fonction holomorphe dans $\Omega \setminus \{a\}$. Quel est le comportement de la fonction f dans un voisinage du point a ?

11. Séries de Laurent

Pour une série entière classique du type

$$\sum_{n \geq 0} c_n z^n,$$

la valeur en 0 est le nombre fini c_0. Un tel développement exclut donc tout comportement plus compliqué au point autour duquel se fait le développement (ici le point 0). Si on veut capturer d'autres comportements nous allons être amenés à étudier aussi des séries du type

$$\sum_{n<0} c_n z^n,$$

où $z \neq 0$. Dans un tel cas, si on pose $z = \frac{1}{u}$ alors la série devient

$$\sum_{p>0} c_{-p} u^p.$$

Si ρ est le rayon de convegence de cette dernière série entière, alors la série $\sum_{n<0} c_n z^n$ converge pour $|z| > \frac{1}{\rho}$ et diverge pour $|z| < \frac{1}{\rho}$.

Définition 11.1. — On appelle série de Laurent une série de la forme

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n,$$

où la sommation a lieu sur tous les éléments de $\mathbb{Z}$.

La convergence d'une telle série ne doit pas se faire par compensation des termes d'indices positifs et négatifs. Plus précisément :

Définition 11.2. — Une série de Laurent est dite convergente si les deux séries

$$\sum_{n\geq 0} a_n z^n \quad \text{et} \quad \sum_{n<0} a_n z^n$$

sont convergentes.

Proposition 11.3. — *Soit $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ une série de Laurent. Soit ρ_1 le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$, et $\rho_2 = \frac{1}{\rho}$ où ρ est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n>0} a_n u^n$.*

(1) Si $\rho_1 < \rho_2$ la série de Laurent ne converge jamais.

(2) Si $\rho_2 < \rho_1$ la série de Laurent converge absolument dans la couronne $\rho_2 < |z| < \rho_1$ notée $C_{\rho_2\rho_1}$. Pour $|z| = \rho_1$ ou $|z| = \rho_2$ il en est comme sur le cercle de convergence d'une série entière, l'étude doit être faite au coup par coup.

(3) Si $\rho_2 = \rho_1$ la série ne peut éventuellement converger que pour certains z de module ρ_1. L'étude là encore se passe comme pour la convergence d'une série entière sur son cercle de convergence, au coup par coup.

Démonstration. — La proposition est une conséquence directe de la remarque sur la convergence de $\sum_{n<0} c_n z^n$ faite au début du paragraphe. □

Proposition 11.4. — *Soit $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ une série de Laurent. Soit ρ_1 le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$, et $\rho_2 = \frac{1}{\rho}$ où ρ est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n>0} a_n u^n$. Supposons que $\rho_2 < \rho_1$. Alors la fonction F de la couronne ouverte $C_{\rho_2\rho_1}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $F(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ est holomorphe dans $C_{\rho_2\rho_1}$.*

Démonstration. — Posons $f_1(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $f_2(z) = \sum_{n<0} a_n z^n$. Alors $F(z) = f_1(z) + f_2(z)$. La fonction $f_1(z)$ somme d'une série entière est holomorphe. La fonction $f_2(z)$ est la composée d'une fonction définie par une série entière, donc holomorphe, avec la fonction $\frac{1}{z}$ qui est holomorphe sur la couronne $C_{\rho_2\rho_1}$. En conséquence $f_2(z)$ est aussi holomorphe. □

Nous allons maintenant étudier une réciproque de la proposition précédente.

Théorème 11.5. — *Toute fonction holomorphe dans une couronne $\rho_2 < |z| < \rho_1$ (où $+\infty \geq \rho_1 > \rho_2 \geq 0$) est développable en série de Laurent en 0 dans cette couronne.*

Démonstration. — Soient r_1 et r_2 tels que $\rho_2 < r_2 < r_1 < \rho_1$. On considère les deux chemins $C(0, r_1)$ et $C(0, r_2)$ qui sont respectivement le cercle de centre 0 et rayon r_1 et le cercle de centre 0 et de rayon r_2 parcourus une fois dans le sens trigonométrique.

$$C(0, r_1)(t) = r_1 e^{it} \quad C(0, r_2)(t) = r_2 e^{it},$$

avec $t \in [0, 2\pi]$. Soit $\gamma = C(0, r_1) - C(0, r_2)$. Si $r_2 < |z| r_1$ alors l'indice $\operatorname{ind}(z, \gamma) = 1$. Par application de la formule de Cauchy :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} dw$$

$$= \frac{1}{2i\pi} \int_{C(0,r_1)} \frac{f(w)}{w - z} dw - \frac{1}{2i\pi} \int_{C(0,r_2)} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Mais :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C(0,r_1)} \frac{f(w)}{w - z} dw = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(0,r_1)} \frac{f(w)}{w} \times \frac{dw}{1 - \frac{z}{w}}.$$

Or on peut écrire :

$$\frac{1}{1 - \frac{z}{w}} = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{z}{w}\right)^n,$$

la convergence étant uniforme lorsque w appartient au support de $C(0, r_1)$. Pour l'intégrale correspondante on en déduit que :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C(0,r_1)} \frac{f(w)}{w - z} dw = \sum_{n \geq 0} z^n \times \frac{1}{2i\pi} \int_{C(0,r_1)} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw.$$

Étudions maintenant la deuxième intégrale :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C(0,r_2)} \frac{f(w)}{w - z} dw = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(0,r_2)} \frac{f(w)}{z} \times \frac{dw}{\frac{w}{z} - 1}.$$

On peut là aussi écrire :

$$\frac{1}{\frac{w}{z} - 1} = -\sum_{n \geq 0} \left(\frac{w}{z}\right)^n,$$

la convergence étant uniforme lorsque w appartient au support de $C(0,r_2)$. En conséquence :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{C(0,r_2)}\frac{f(w)}{w-z}dw = -\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{z}\right)^{n+1}\times\frac{1}{2i\pi}\int_{C(0,r_2)}f(w)w^n dw,$$

qui peut s'écrire encore :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{C(0,r_2)}\frac{f(w)}{w-z}dw - \sum_{n<0} z^n \times \frac{1}{2i\pi}\int_{C(0,r_2)}\frac{f(w)}{w^{n+1}}dw.$$

En conséquence on peut écrire pour tout $r_2 < |z| < r_1$:

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n z^n,$$

avec :

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{2i\pi}\int_{C(0,r_1)}\frac{f(w)}{w^{n+1}}dw & \text{si} \quad n\geq 0 \\ \frac{1}{2i\pi}\int_{C(0,r_2)}\frac{f(w)}{w^{n+1}}dw & \text{si} \quad n<0. \end{cases}$$

Si maintenant on choisit R quelconque vérifiant $\rho_2 < R < \rho_1$ définissons $\gamma_1 = C(0,r_1) - C(0,R)$. On peut dire que $C_{\rho_2\rho_1} \supset \{z \mid \text{ind}(z,\gamma_1) \neq 0\}$ et appliquer le théorème de Cauchy à la fonction holomorphe $\frac{f(w)}{w^{n+1}}$, ce qui permet d'obtenir :

$$\int_{C(0,r_1)}\frac{f(w)}{w^{n+1}}dw = \int_{C(0,R)}\frac{f(w)}{w^{n+1}}dw.$$

De la même façon :

$$\int_{C(0,r_2)}\frac{f(w)}{w^{n+1}}dw = \int_{C(0,R)}\frac{f(w)}{w^{n+1}}dw.$$

Tout ceci prouve que les coefficients c_n sont indépendants de r_1 et r_2.

En conclusion, comme r_1 et r_2 sont quelconques, on a pour tout $\rho_2 < |z| < \rho_1$ le développement en série de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n,$$

avec :

$$c_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{C(0,R)}\frac{f(w)}{w^{n+1}}dw,$$

où R est un réel quelconque tel que $\rho_2 < R < \rho_1$. □

Remarque 11.6. — Bien entendu le théorème précédent s'applique au voisinage d'un point a où on peut alors écrire un développement de Laurent :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(a)(z-a)^n,$$

avec :

$$c_n(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(a,R)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw.$$

12. Étude des points singuliers isolés

12.1. Classification des points singuliers isolés. — Soit Ω_0 un ouvert de $\mathbb{C}$ et $a \in \Omega_0$. Soit f une fonction holomorphe dans $\Omega = \Omega_0 \setminus \{a\}$. Soit $0 < \rho_1 < d(a, \complement\Omega_0)$ et $\rho_2 = 0$. La fonction f est donc holomorphe dans la couronne $C_{\rho_2 \rho_1}(a)$ et y est développable en série de Laurent sous la forme :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(a)(z-a)^n.$$

Définition 12.1. — Le point a est dit point régulier si pour tout $n < 0$ on a $c_n(a) = 0$. Le point a est dit point singulier isolé s'il existe $n < 0$ tel que $c_n(a) \neq 0$.

Définition 12.2. — Si a est un point singulier isolé, on dit que a est un pôle s'il existe $m < 0$ tel que pour tout $n < m$ on ait $c_n(a) = 0$. L'ordre du pôle a est alors défini par

$$-\inf\{m \mid c_m \neq 0\}.$$

Si a est un point singulier isolé qui n'est pas un pôle, on dit que a est un point singulier isolé essentiel.

Remarque 12.3. — Il est clair que si le point a est régulier, la fonction f peut être prolongée au point a par la valeur $c_0(a)$. En outre, la fonction obtenue, qui est au voisinage de a somme d'une série entière est holomorphe sur Ω_0.

12.2. Inégalités de Cauchy pour les séries de Laurent. — Les coefficients $c_(a)$ vérifient des inégalités généralisant les inégalités de Cauchy qu'on a vu dans le cadre des fonctions analytiques.

Proposition 12.4. — *Soit Ω_0 un ouvert de $\mathbb{C}$ et a un point de Ω_0 Soit f une fonction définie sur $\Omega = \Omega_0 \setminus \{a\}$ développable en série de Laurent au voisinage du point a. Soit R tel que $0 < R < d(a, \complement\Omega_0)$. Alors les coefficients $c_n(a)$ du développement en série de Laurent de f vérifient les inégalités :*

$$|c_n(a)| \leq \frac{M(R)}{R^n},$$

où

$$M(R) = \sup_{|z-a|=R} |f(z)|.$$

Démonstration. — Rappelons la valeur de $c_n(a)$:

$$c_n(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(a,R)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw.$$

Le calcul de l'intégrale sur le cercle est alors très simple :

$$c_n(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(a+Re^{it})}{R^{n+1}e^{i(n+1)t}} iRe^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(a+Re^{it})}{R^n e^{int}} dt,$$

ce qui implique en passant aux valeurs absolues que :

$$|c_n(a)| \leq \frac{M(R)}{R^n}.$$

□

Bien entendu, comme pour le cas des fonctions analytiques, nous allons tirer des inégalités sur les coefficients du développement en série de Laurent quelques conséquences sur la fonction f elle-même.

Théorème 12.5. — *Si f, holomorphe dans $\Omega = \Omega_0 \setminus \{a\}$, est bornée au voisinage de a, alors le point a est un point régulier. Si f est telle que :*

$$f(z) = O\left(\frac{1}{|z-a|^p}\right),$$

où $p > 0$, au voisinage de a, alors a est un point régulier ou alors un pôle d'ordre au plus p.

Démonstration. — Dans le cas où f est bornée au voisinage de a il existe un R_0 et un $M > 0$ tels que :

$$0 < R_0 < d(a, \complement\Omega_0),$$

et

$$|f(z)| \leq M \text{ pour tout } z \text{ tel que } 0 \leq |z - a| < R_0.$$

Alors :

$$|c_n(a)| \leq \frac{M}{R^n},$$

ce qui montre, en faisant tendre R vers 0 que $c_n(a) = 0$ pour tout $n < 0$.

Dans le deuxième cas, il existe un R_0 et un $M > 0$ tels que :

$$0 < R_0 < d(a, \complement\Omega_0),$$

et

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z - a|^p} \text{ pour tout } z \text{ tel que } 0 \leq |z - a| < R_0.$$

Alors :

$$|c_n(a)| \leq \frac{M}{R^{n+p}},$$

ce qui montre, en faisant tendre R vers 0 que $c_n(a) = 0$ pour tout entier $n < -p$. □

Le théorème précédent admet une réciproque.

Théorème 12.6. — *Si a est un point régulier alors f est bornée au voisinage de a. Si a est un pôle d'ordre inférieur ou égal à p alors $f(z) = O\left(\frac{1}{|z-a|^p}\right)$.*

Démonstration. — Dans le premier cas, f est continue au point a donc bornée au voisinage de a. Le deuxième cas se ramène au premier cas en multipliant f par $(z - a)^p$. □

En conséquence on obtient le théorème important suivant :

Théorème 12.7. — *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction f holomorphe dans $\Omega = \Omega_0 \setminus \{a\}$ soit prolongeable en une fonction holomorphe dans Ω_0 est que a soit bornée au voisinage de a.*

12.3. Image d'une fonction au voisinage d'un point singulier essentiel. —

***Théorème 12.8* (Théorème de Weierstrass).** — *Soit Ω_0 un ouvert de $\mathbb{C}$ et a un point de Ω_0. Soit une fonction f définie et holomorphe sur $\Omega = \Omega_0 \setminus \{a\}$. On suppose que a est un point singulier isolé essentiel de f. Alors pour tout voisinage $V(a)$ du point a, inclus dans Ω_0, l'image $f\big(V(a) \setminus \{a\}\big)$ est dense dans $\mathbb{C}$.*

Démonstration. — La fonction f n'est pas bornée dans $V(a) \setminus \{a\}$ sinon le point a serait régulier. Supposons que $f\big(V(a) \setminus \{a\}\big)$ ne soit pas dense dans $\mathbb{C}$. Alors il existe $b \in \mathbb{C}$ et $V(b)$ un voisinage de b tels que $v(b) \cap f\big(V(a) \setminus \{a\}\big) = \emptyset$. Soit $h(z) = \frac{1}{f(z)-b}$. La fonction $h(z)$ est holomorphe dans $V(a) \setminus \{a\}$ et bornée dans ce voisinage, par conséquent $h(z)$ se prolonge en une fonction holomorphe dans $V(a)$ qu'on notera encore $h(z)$. Mais $f(z) = b + \frac{1}{h(z)}$ pour tout $z \in V(a) \setminus \{a\}$. Or $h(z)$ peut s'écrire $h(z) = (z-a)^q k(z)$ où $q \geq 0$ et $k(z)$ holomorphe dans $V(a)$ vérifiant $k(a) \neq 0$, ce qui fait que $\frac{1}{k(z)}$ est aussi holomorphe dans un voisinage $V_1(a) \subset V(a)$ de a. On peut alors écrire pour tout $z \in V_1(a) \setminus \{a\}$:

$$f(z) = b + \frac{1}{(z-a)^q} k^{-1}(z),$$

ce qui montre que a est un pôle d'ordre $\leq q$ (ou même peut être un point régulier) contrairement à l'hypothèse. □

***Corollaire 12.9*.** — *Soit g une fonction entière non polynomiale. Alors $g(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathbb{C}$.*

Démonstration. — Posons $f(z) = g\left(\frac{1}{z}\right)$ pour tout $z \neq 0$. La fonction f est holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Comme g n'est pas un polynôme, les théorèmes 10.3 et 12.5 permettent de conclure que 0 est un point singulier essentiel pour la fonction f. Le théorème précédent permet alors de conclure. □

***Remarque 12.10*.** — En conclusion, au voisinage d'un point singulier isolé z_0, le comportement de la fonction holomorphe f peut être d'un des trois types suivants :

(1) $lim_{z \to z_0} f(z) = a$: f est régulière et peut être prolongée en z_0 en une fonction holomorphe ;
(2) $lim_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty$: le point z_0 est un pôle ;
(3) $|f(z)|$ n'a pas de limite en z_0 : le point z_0 est un point singulier essentiel.

Remarque 12.11. — Le théorème de Weierstrass a été amélioré par E. Picard qui a montré le résultat suivant :

Soit Ω_0 un ouvert de $\mathbb{C}$ et a un point de Ω_0. Soit une fonction f définie et holomorphe sur $\Omega = \Omega_0 \setminus \{a\}$. On suppose que a est un point singulier isolé essentiel de f. Soit un voisinage $V(a)$ du point a, inclus dans Ω_0. Alors tout point de $\mathbb{C}$ sauf peut être un, est atteint une infinité de fois comme image de f.

Définition 12.12. — Soit Ω_0 un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Une fonction f est dite méromorphe sur Ω_0 si elle est holomorphe sur Ω_0 privé d'un ensemble de points isolés qui sont des pôles pour f.

12.4. Théorème des résidus. —

Définition 12.13. — Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et a un point de Ω_0. Soit f une fonction holomorphe dans $\Omega = \Omega_0 \setminus \{a\}$ qui admet a comme point singulier isolé. On appelle résidu de f au point a et on note $\mathrm{Res}_f(a)$ le coefficient $c_{-1}(a)$ de la série de Laurent $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(a)(z-a)^n$, c'est-à-dire :

$$\mathrm{Res}_f(a) = c_{-1}(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(0,R)} f(w)dw.$$

Théorème 12.14. — *Soit Ω_0 un ouvert de $\mathbb{C}$ et $a_1, a_2 \cdots a_n$ des points de Ω_0. Soit f une fonction holomorphe dans $\Omega = \Omega_0 \setminus \{a_1, a_2 \cdots a_n\}$ admettant les points $a_1, a_2 \cdots a_n$ comme points singuliers isolés. Soit γ un système de lacets contenu dans Ω_0 ne rencontrant aucun des a_i. Supposons en outre que $\Omega_0 \supset \complement\{z \mid \mathrm{ind}(z,\gamma) = 0\}$. Alors :*

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma f(z)dz = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{ind}(a_i,\gamma)\mathrm{Res}_f(a_i).$$

Démonstration. — Considérons n disques fermés D_k disjoints deux à deux, inclus dans Ω_0 de centres respectifs a_k et rayons respectifs r_k. Pour chaque k on note C_k le lacet défini sur $[0, 2\pi]$ par :

$$C_k(t) = a_k + r_k e^{i\nu_k t}.$$

où $\nu_k = -\mathrm{ind}(a_k, \gamma)$. Posons $\gamma' = \gamma + C_1 + \cdots + C_n$. Alors du fait que $\mathrm{ind}(a_k, C_r) = \delta_{k,r}$ on voit que pour tout k on a $\mathrm{ind}(a_k, \gamma') = 0$. Par suite $\Omega \supset \complement\{z \mid \mathrm{ind}(z, \gamma') = 0\}$. On peut appliquer le théorème de Cauchy à f dans Ω et au système γ' :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma'} f(z)dz = 0.$$

Mais l'intégrale nulle précédente est aussi égale à :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma'} f(z)dz = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f(z)dz - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2i\pi} \int_{C(a_k, r_k)} f(z)dz$$

$$= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f(z)dz - \sum_{k=0}^{n} \mathrm{ind}(a_k, \gamma)\mathrm{Res}_f(a_k).$$

En conséquence :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f(z)dz = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{ind}(a_k, \gamma)\mathrm{Res}_f(a_k).$$

□

Remarque 12.15. — En pratique, on doit parfois calculer le résidu d'une fonction f qui s'exprime sous la forme :

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)k(z)},$$

en un point a, avec $h(a) = 0$, $h'(a) \neq 0$, $g(a) \neq 0$, $k(a) \neq 0$. Dans ces conditions :

$$\mathrm{Res}_f(a) = \frac{g(a)}{h'(a)k(a)}.$$

12.5. Une application du théorèmes des résidus au nombre de zéros. —

Théorème 12.16. — *Soit f une fonction holomorphe non nulle dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}$. Soit γ un système de lacets inclus dans Ω dont le support ne contient aucun zéro de f. On supose que $\Omega \supset \complement\{z \mid \operatorname{ind}(z,\gamma) = 0\}$. Soit $\{a_i\}_{i\in I}$ l'ensemble des zéros de f. On notera $k(a_i)$ l'ordre du zéro a_i. Alors :*

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{ind}(a_i,\gamma)k(a_i).$$

Démonstration. — Il est facile de voir en développant en série entière $f(z)$ et $f'(z)$ au voisinage d'un point a_i, que si $f(z)$ a un zéro d'ordre $k(a_i)$ au point a_i alors la fonction méromorphe $\frac{f'(z)}{f(z)}$ a un pôle en a_i et que le résidu en ce pôle est $k(a_i)$. Par application du théorème des résidus on a le résultat. □

Remarque 12.17. — Si γ est un cercle $C(a,r)$ parcouru une fois dans le sens positif alors le nombre N de zéros de $f(z)$ contenus dans le disque dont la frontière est le support de $C(a,r)$ est donné par :

$$N = \frac{1}{2i\pi}\int_{C(a,r)} \frac{f'(z)}{f(z)}dz.$$

12.6. application au calcul des intégrales. — Le calcul des résidus nous permet de calculer certaines intégrales sans calculer une primitive de la fonction à intégrer. Ceci nous permet donc d'obtenir un résultat dans certains cas où on n'arrive pas à déterminer une primitive ou à simplifier un calcul où l'obtention d'une primitive serait possible mais conduirait à un calcul fastidieux. Classiquement, les exemples de tels calculs se partagent en cinq catégories principales. Dans la suite R désigne une fraction rationnelle générale.

12.6.1. Type 1 : intégrales de la forme $I = \int_0^{2\pi} R(sin(t), cos(t))dt$. — Ici, R désigne une fraction rationnelle qui n'a pas de pôle sur le cercle $x^2 + y^2 = 1$.

Notons C le cercle unité parcouru une fois, c'est à dire le chemin défini par

$$C \ : \ t \in [0, 2\pi] \rightarrow z = e^{it}.$$

Posons alors :

$$f(z) = \frac{1}{z} R\left(\frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right).$$

Avec ces notations nous pouvons alors écrire :

$$I = \frac{1}{i} \int_C f(z) dz,$$

et donc :

$$I = 2\pi \sum_{a \in \mathbf{P}} \mathrm{Res}_f(a),$$

où la somme est étendue à l'ensemble $\mathbf{P}$ des pôles de f à l'intérieur du disque unité.

Exemple 12.18. — calculons

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 + sin(t)}.$$

Le calcul précédent montre que :

$$I = 4i\pi \sum_{a \in \mathbf{P}} \mathrm{Res}_f(a),$$

où

$$f = \frac{1}{z^2 + 4iz - 1}.$$

Le seul pôle de f contenu dans le disque unité est :

$$a = -2i + i\sqrt{3},$$

et le résidu en ce pôle est :

$$\mathrm{Res}_f(a) = \frac{1}{2i\sqrt{3}}.$$

Donc :

$$I = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

12.6.2. Type 2 : intégrales de la forme $I = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx$. — Ici, R désigne une fraction rationnelle qui n'a pas de pôles réels. Pour que l'intégrale soit convergente on suppose en outre qu'à l'infini :

$$R(x) \sim \frac{1}{x^n}$$

avec $n \geq 2$. Soit $\gamma_1(r)$ le chemin "demi-cercle" de centre O et rayon r défini par :

$$\gamma_1(r) \ : \ t \in [0, \pi] \rightarrow re^{it},$$

et γ_2 le chemin sur l'axe réel défini par :

$$\gamma_2 \ : \ t \in [-r, r] \rightarrow t.$$

Nous noterons $\Gamma_1(r)$ le support de $\gamma_1(r)$. Notons aussi γ le chemin $\gamma 1+\gamma 2$ qui en fait est un lacet (voir figure 5). Remarquons que pour r assez grand,

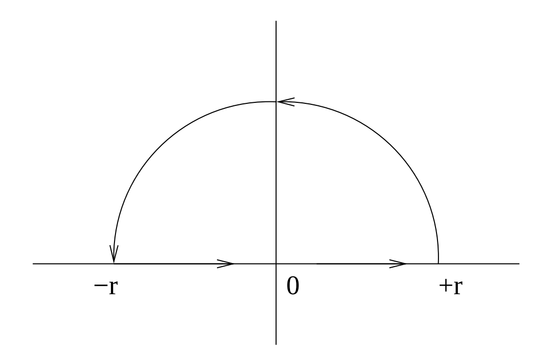


FIGURE 5. Lacet demi-cercle

tous les pôles dont la partie imaginaire est > 0 se trouvent à l'intérieur du demi-cercle et donc aucun pôle ne sera sur le support du lacet. On peut donc écrire :

$$\int_\gamma R(z)dz = \int_{-r}^{+r} R(x)dx + \int_{\gamma_1(r)} R(z)dz = 2i\pi \sum_{a \in \mathbf{R}} \mathrm{Res}_R(a).$$

Soit $M(r) = sup_{z \in \Gamma_1(r)} |R(z)|$. On peut écrire :

$$\left| \int_{\gamma_1(r)} R(z)dz \right| \leq \pi M(r)r.$$

Mais en vertu de l'hypothèse sur le comportement de R à l'infini, on conclut que :

$$\lim_{r\to+\infty}\left|\int_{\gamma_1(r)} R(z)dz\right| = 0,$$

en conséquence :

$$\lim_{r\to+\infty}\int_{-r}^{+r} R(x)dx = 2i\pi\sum_{a\in\mathbf{R}}\mathrm{Res}_R(a).$$

Comme l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)dx$ est convergente, les deux limites

$$\lim_{r\to+\infty}\int_{-r}^{0} R(x)dx \quad \text{et} \quad \lim_{r\to+\infty}\int_{0}^{r} R(x)dx$$

existent séparément et on peut donc écrire :

$$I = \lim_{r\to+\infty}\int_{-r}^{+r} R(x)dx = 2i\pi\sum_{a\in\mathbf{R}}\mathrm{Res}_R(a).$$

Exemple 12.19. — Calculons $I = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4}$. Les pôles de $\frac{1}{1+x^4}$ du demi-plan positif sont $e^{\frac{i\pi}{4}}$ et $e^{\frac{3i\pi}{4}}$. Les résidus en ces points sont respectivement $-\frac{1}{4}e^{\frac{i\pi}{4}}$ et $-\frac{1}{4}e^{\frac{3i\pi}{4}}$. Donc :

$$I = 2i\pi\frac{1}{4}(-2i\sin(\frac{\pi}{4})) = \pi\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

12.6.3. Type 3 : intégrales de la forme $I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix}dx$. — Ici, f est une fonction holomorphe sur un domaine contenant le demi-plan fermé $\mathcal{R}e(z) \geq 0$ sauf peut être en un nombre fini de points.

a) Cas où f n'a pas de pôle sur l'axe réel. Nous allons montrer le résultat suivant :

Proposition 12.20. — *Si* $\lim_{|z|\to\infty,\mathcal{R}e(z)\geq 0} f(z) = 0$ *alors :*

$$\lim_{r\to+\infty}\int_{-r}^{r} f(x)e^{ix}dx = 2i\pi\sum_{a\in\mathbf{P}}\mathrm{Res}_{f(z)e^{iz}}(a),$$

où $\mathbf{P}$ *est l'ensemble des pôles de* $f(z)$ *contenus dans le demi-plan ouvert supérieur* $\mathcal{R}e(z) > 0$.

Si de plus l'intégrale $I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix}dx$ *est convergente alors :*

$$I = 2i\pi \sum_{a\in \mathbf{P}} \mathrm{Res}_{f(z)e^{iz}}(a).$$

Démonstration. — Nous allons introduire le même chemin γ que lors de l'étude du type 2 (voir figure 5). Nous allons montrer que là encore nous avons le résultat suivant :

$$\lim_{r\to+\infty} \left| \int_{\gamma_1(r)} f(z)e^{iz}dz \right| = 0.$$

Pour cela, notons $M(r) = sup_{z\in\Gamma_1(r)}|f(z)|$. On peut alors écrire :

$$\left| \int_{\gamma_1(r)} f(z)e^{iz}dz \right| \leq M(r) \int_0^{\pi} re^{-r\sin(\theta)}d\theta = 2M(r) \int_0^{\frac{\pi}{2}} re^{-r\sin(\theta)}d\theta$$

L'étude de la fonction $\sin(\theta) - \dfrac{2\theta}{\pi}$ sur $[0, \pi/2]$ montre que sur cet intervalle on a :

$$\frac{2\theta}{\pi} \leq \sin(\theta) \leq \theta.$$

En conséquence :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} re^{-r\sin(\theta)}d\theta \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} re^{-\frac{2}{\pi}r\theta}d\theta \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} re^{-\frac{2}{\pi}r\theta}d\theta = \frac{\pi}{2}\left(1 - e^{-r}\right) \leq \frac{\pi}{2}.$$

On déduit donc que :

$$\left| \int_{\gamma_1(r)} f(z)e^{iz}dz \right| \leq \pi M(r).$$

Comme par hypothèse $\lim_{r\to+\infty} M(r) = 0$ on obtient le résultat annoncé.

□

Exemple 12.21. — Calculons $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin(x)}{1+x^2}dx$. Remarquons tout d'abord que $I = 2\int_0^{+\infty} \frac{x\sin(x)}{1+x^2}dx$ et que cette dernière intégrale est convergente. En effet par intégration par partie (on dérive $x/1+x^2$ et on intègre $\sin(x)$)

$$\int_0^A \frac{x\sin(x)}{1+x^2}dx = -\frac{A\cos(A)}{1+A^2} + \int_0^A \frac{\cos(x)}{1+x^2}dx - 2\int_0^A \frac{x^2\cos(x)}{(1+x^2)^2}dx.$$

En observant le second membre on voit que le terme tout intégré tend vers 0 lorsque A tend vers l'infini, et que les deux intégrales sont convergentes. Par ailleurs la fonction

$$f(z)e^{iz} = \frac{ze^{iz}}{1+z^2}$$

n'a que deux pôles i et $-i$ dont un seul dans le demi-plan supérieur. Le résidu en ce pôle i est $\frac{1}{2e}$. En conséquence :

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix}dx = \frac{i\pi}{e},$$

et

$$I = \mathcal{I}m(I_1) = \frac{\pi}{e}.$$

b) Cas où f a des pôles sur l'axe réel. Le cas des pôles qui ne sont pas sur l'axe réel a déjà été traité, et donc en écrivant f comme une somme (et en utilisant éventuellement des translations), on se ramènera au cas où f a un seul pôle et où celui-ci est à l'origine. On introduit les chemins $\gamma_1(r)$ demi-cercle centré en O de rayon r d'origine A et extrémité B, $\gamma_2(r,s)$ segment de l'axe réel d'origine B et extrémité C, $\gamma_3(s)$ demi-cercle de centre O de rayon s d'origine C et extrémité D, $\gamma_4(r,s)$ le segment de l'axe réel d'origine D et extrémité A. Enfin nous notons $\gamma(r,s)$ le lacet $\gamma_1(r) + \gamma_2(r,s) + \gamma_3(s) + \gamma_4(r,s)$ (voir figure 6). On supposera

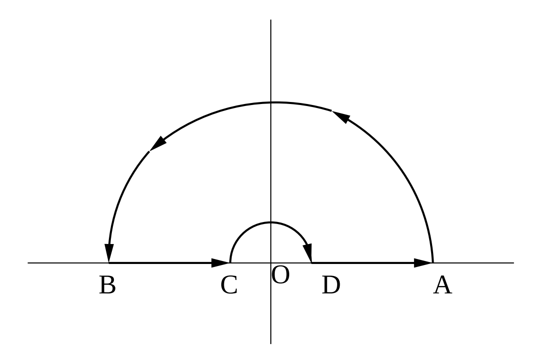


FIGURE 6. Lacet demi-cercle avec évitement de O

maintenant que 0 est un pôle simple de f et que f vérifie comme dans le

cas précédent $\lim_{r\to+\infty} f(z) = 0$. On voit que $fz)e^{iz}$ est holomorphe sur un ouvert simplement connexe contenant $\gamma(r,s)$. On peut donc écrire :

$$\int_\gamma (r,s) f(z)e^{iz}dz =$$

$$\int_{\gamma_1(r)} f(z)e^{iz}dz + \int_{\gamma_2(r,s)} f(z)e^{iz}dz + \int_{\gamma_3(s)} f(z)e^{iz}dz + \int_{\gamma_4(r,s)} f(z)e^{iz}dz = 0.$$

Si nous supposons que les deux intégrales :

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)e^{ix}dx \text{ et } \int_{0}^{+\infty} f(x)e^{ix}dx$$

sont convergentes en $-\infty$ et en 0 pour la première et en 0 et en $+\infty$ pour la deuxième, on aura en faisant tendre r vers $+\infty$ et s vers 0 :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix}dx = -\left(\lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma_1(r)} f(z)e^{iz}dz + \lim_{s\to 0} \int_{\gamma_3(s)} f(z)e^{iz}dz\right).$$

Mais nous avons déjà vu que :

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{\gamma_1(r)} f(z)e^{iz}dz = 0$$

donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix}dx = -\lim_{s\to 0} \int_{\gamma_3(s)} f(z)e^{iz}dz.$$

Pour calculer l'intégrale du second membre écrivons :

$$f(z)e^{iz} = \frac{c}{z} + h(z)$$

où h est une fonction holomorphe. On voit que :

$$\lim_{s\to 0} \int_{\gamma_3(s)} f(z)e^{iz}dz = \lim_{s\to 0} \int_{\gamma_3(s)} h(z)dz + \lim_{s\to 0} \int_{\gamma_3(s)} \frac{cdz}{z}$$

$$\lim_{s\to 0} \int_{\gamma_3(s)} f(z)e^{iz}dz = \lim_{s\to 0} \int_{\gamma_3(s)} \frac{cdz}{z} = -\pi i c.$$

(Le signe "-" provient du parcours inverse du sens trigonométrique pour $\gamma_3(s)$.) En conclusion,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix}dx = \pi i \text{Res}_{f(z)e^{iz}}(0).$$

Exemple 12.22. — Calculons $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$. On montre la convergence de cette intégrale par intégration par partie, comme dans l'exemple précédent. Le seul pôle de la fonction e^{iz}/z est au point 0 et le résidu en ce point est 1. On en conclut que :

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = i\pi$$

puis que :

$$I = \mathcal{I}m(I_1) = \pi.$$

12.6.4. Type 4 : intégrales de la forme $I = \int_0^{+\infty} \frac{R(x)}{x^\alpha} dx$. — Ici α est un nombre vérifiant $0 < \alpha < 1$ et $R(x)$ est une fraction rationnelle telle que $\lim_{x \to +\infty} R(x) = 0$. En outre on suppose que $R(z)$ n'a pas de pôle sur le demi-axe réel $[0, +\infty[$ défini par $\mathcal{I}m(z) = 0$ et $\mathcal{R}e(z) \geq 0$. Dans ces conditions, l'intégrale qu'on étudie est convergente. Considérons le lacet γ décrit par la figure 7. Plus précisément on considère le (grand) cercle $C(r)$ de centre O et de rayon r, le (petit) cercle de centre O et de rayon s. On note D le point du petit cercle d'ordonnée ϵ et d'abscisse > 0, A le point du grand cercle d'ordonnée ϵ et d'abscisse > 0. On note respectivement C et B les symétriques par rapport à l'axe des abscisse des points D et A. On considére le lacet

$$\gamma(r, s, \epsilon) = \gamma_1(r, \epsilon) + \gamma_2(r, s, \epsilon) + \gamma_3(s, \epsilon) + \gamma_4(r, s, \epsilon),$$

où $\gamma_1(r, \epsilon)$ est le chemin constitué par l'arc de grand cercle parcouru dans le sens trigonométrique (A, B), $\gamma_2(r, s, \epsilon)$ est le segment (B, C) parcouru une fois de B vers C, $\gamma_3(s, \epsilon)$ est le chemin constitué par l'arc de petit cercle parcouru dans le sens inverse du sens trigonométrique (C, D) et $\gamma_4(r, s, \epsilon)$ est le segment (D, A) parcouru une fois de D vers A. On peut trouver un ouvert simplement connexe ne contenant pas l'origine, contenant le support de ce lacet et dans lequel la fonction $R(z)/z^\alpha$ soit méromorphe. L'intégrale le long des deux bouts des deux segments donne :

$$I_1 = \int_{s-u(\epsilon)}^{r-v(\epsilon)} \frac{R(x+i\epsilon)}{(x+i\epsilon)^\alpha} ds - \int_{s-u(\epsilon)}^{r-v(\epsilon)} \frac{R(x-i\epsilon)}{(x-i\epsilon)^\alpha} dx.$$

Lorsque ϵ tend vers 0 la première intégrale tend vers

$$\int_s^r \frac{R(x)}{x^\alpha} ds$$

alors que la deuxième intégrale tend vers

$$\int_s^r \frac{R(x)}{e^{2i\pi\alpha} x^\alpha} dx$$

car l'argument de z tend vers 2π. Donc lorsque ϵ tend vers 0, I_1 tend vers :

$$(1 - e^{-2i\pi\alpha}) \int_s^r \frac{R(x)}{x^\alpha} ds.$$

Nous avond déjà vu dans les exemples précédents que l'intégrale le long du grand cercle tend vers 0 lorsque le rayon r tend vers l'infini, et que l'intégrale le long du petit cercle tend vers 0 lorsque le rayon s tend vers 0. On obtient en définitive :

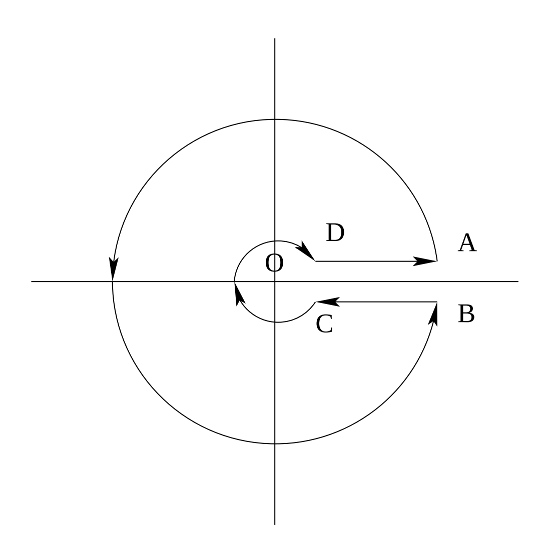


FIGURE 7. Lacet cercle avec coupure

$$I = \frac{2i\pi}{1 - e^{-2i\pi\alpha}} \sum_{a \in \mathbf{P}} \mathrm{Res}_{\frac{R(z)}{z^\alpha}}(a),$$

où la somme des résidus est étendue à tous les pôles de la fonction $R(z)/z^\alpha$.

Remarque 12.23. — Si on utilisait la surface de Riemann associée à la fonction z^{alpha} on pourrait se dispenser du ϵ et de l'étude lorsque ϵ tend vers zéro. Dans ce cours élémentaire, on a procédé autrement.

Exemple 12.24. — Calculons $I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha(1+x)}} dx$ avec bien entendu $0 < \alpha < 1$. Ici

$$R(z) = \frac{1}{1+z}.$$

La fraction rationnelle $R(z)$ a pour seul pôle $z = -1$ et le résidu de $R(z)/z^{\alpha}$ en ce pôle est $e^{-i\pi\alpha}$. Par conséquent :

$$I = \frac{2i\pi}{1 - e^{-2i\pi\alpha}} e^{-i\pi\alpha} = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}.$$

12.6.5. Type 5 : intégrales de la forme $I = \int_0^{+\infty} R(x)\log(x)dx$. — Ici, $R(x)$ est une fraction rationnelle telle que $\lim_{x\to+\infty} xR(x) = 0$. On suppose en outre que $R(z)$ n'a pas de pôle sur le demi-axe réel $[0, +\infty[$ défini par $\mathcal{I}m(z) = 0$ et $\mathcal{R}e(z) \geq 0$. Dans ces conditions, l'intégrale qu'on étudie est convergente.

Proposition 12.25. — *Sous les hypothèses indiquées on a la relation :*

$$-2\int_0^{+\infty} R(x)\log(x)dx - 2i\pi \int_0^{+\infty} R(x)dx = \sum_{a\in\mathbf{P}} \mathrm{Res}_{R(z)(\log(z))^2}(a),$$

où la somme est étendue aux pôles a de la fonction $R(z)(\log(z))^2$.

Démonstration. — On prend le même lacet que dans le type 4) et on intègre sur ce chemin la fonction $R(z)(\log(z))^2$. On en tire immédiatement la relation :

$$\int_0^{+\infty} R(x)\log(x)^2 dx - \int_0^{+\infty} R(x)(\log(x) + 2i\pi)^2 dx =$$

$$2i\pi \sum_{a\in\mathbf{P}} \mathrm{Res}_{R(z)(\log(z))^2}(a),$$

qui donne en développant le carré de la deuxième intégrale et en simplifiant la relation annoncée. □

Cette relation ne donne pas *a priori* l'intégrale voulue. mais si on fait l'hypothèse supplémentaire que R est une fraction rationnelle à coefficients réels, alors on a en séparant la partie réelle et la partie imaginaire de la relation précédente on peut donner les valeurs des intégrales :

$$\int_0^{+\infty} R(x)\log(x)dx = -\frac{1}{2}\mathcal{R}e\left(\sum_{a\in\mathbf{P}} \mathrm{Res}_{R(z)(\log(z))^2}(a)\right),$$

$$\int_0^{+\infty} R(x)dx = -\frac{1}{2\pi}\mathcal{I}m\left(\sum_{a\in\mathbf{P}} \mathrm{Res}_{R(z)(\log(z))^2}(a)\right).$$

PARTIE IV
ZÉROS ET PÔLES DES FONCTIONS HOLOMORPHES ET MÉROMORPHES

Le théorème 10.5 indique que si f est une fonction holomorphe non constante sur un ouvert Ω, l'ensemble de ses zéros n'a pas de point d'accumulation dans Ω. Nous allons montrer que réciproquement, si un ensemble Z n'a pas de point d'accumulation dans Ω il existe une fonction holomorphe f dans Ω dont l'ensemble des zéros est exactement Z. En outre on peut imposer en chaque point de A l'ordre du zéro de f en ce point.

Lemme 12.26. — *Une fonction entière $f(z)$ qui n'a aucun zéro dans $\mathbb{C}$ peut s'écrire $f(z) = e^{g(z)}$ où la fonction g est elle-même entière.*

Démonstration. — Puisque $f(z)$ n'a aucun zéro, la fonction

$$\frac{f'(z)}{f(z)}$$

est une fonction entière, et donc la dérivée d'une fonction entière $g(z)$. La fonction entière $f(z)e^{-g(z)}$ est de dérivée nulle. Elle est constante, donc :

$$f(z) = Ce^{g(z)}.$$

Comme C est une constante complexe non nulle, elle peut être absorbée par $g(z)$ si bien qu'avec ce nouveau $g(z)$:

$$f(z) = e^{g(z)}.$$

□

13. Le théorème de factorisation de Weierstrass

On considère la suite de fonctions :

$$f_0(z) = 1 - z,$$

et pour $p \geq 1$:

$$f_p(z) = (1-z)e^{z+\frac{z^2}{2}+\cdots+\frac{z^p}{p}}.$$

Lemme 13.1. — *Pour $|z| \leq 1$ et pour tout p, on a :*

$$|f_p(z) - 1| \leq |z|^{p+1}.$$

Démonstration. — La démonstration se fait par récurrence sur p. Pour $p = 0$ on a par définition $|f_0(z) - 1| = |z|$ et donc l'inégalité du lemme a lieu. Pour $p \geq 1$, calculons la dérivée de f_p :

$$f_p'(z) = -z^p e^{z+\frac{z^2}{2}+\cdots+\frac{z^p}{p}}.$$

Ainsi on voit que $f_p'(z)$ a un zéro d'ordre p en $z = 0$ et que $-f_p'(z)$ a un développement en série entière sur $\mathbb{C}$ avec des coefficients ≥ 0. Or :

$$1 - f_p(z) = -\int_0^z f_p'(t)dt.$$

En conséquence $1-f_p(z)$ a un zéro d'ordre $p+1$ en $z = 0$ et les coefficients de son développement en série entière sont ≥ 0. En conséquence si $|z| \leq 1$ alors :

$$\left|\frac{1-f_p(z)}{z^{p+1}}\right| \leq \left(\left|\frac{1-f_p(z)}{z^{p+1}}\right|\right)_{z=1} = 1.$$

□

Théorème 13.2. — *Soit $(z_n)_n$ une suite de nombres complexes telle que pour tout n on ait $z_n \neq 0$. Posons $r_n = |z_n|$ et supposons que $\lim_{n\to\infty} r_n = +\infty$ (cette dernière condition étant équivalente au fait que*

la suite $(z_n)_n$ n'a pas de point d'accumulation dans $\mathbb{C}$). Soit $(p_n)_n$ une suite d'entiers ≥ 0 telle que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{r}{r_n}\right)^{p_n+1} < +\infty$$

pour tout entier positif r. Remarquons que dans tous les cas la suite $p_n = n-1$ convient, cependant en fonction des valeurs r_n il peut se faire que cette condition soit satisfaite pour des p_n plus petits auquel cas on aura intérêt à les utiliser. Alors le produit

$$f(z) = \prod_{n=1}^{+\infty} f_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)$$

définit une fonction entière ayant un zéro en chaque point z_n (si plusieurs z_n sont égaux, k d'entre eux par exemple, il y a un zéro d'ordre k en ce point) et aucun autre zéro dans $\mathbb{C}$.

Démonstration. — Le résultat découle simplement de l'étude des produits infinis. Si on pose $A_n(z) = f_{p_n}(z) - 1$ on a alors d'après le lemme précédent :

$$\left|A_n\left(\frac{z}{z_n}\right)\right| \leq \left|\frac{z}{z_n}\right|^{p_n+1} = \left(\frac{r}{r_n}\right)^{p_n+1}$$

dès que $r_n \geq r$, ce qui se produit pour tout n en dehors d'un ensemble fini. De la convergence uniforme sur tout compact de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|A_n\left(\frac{z}{z_n}\right)\right|,$$

on déduit la convergence uniforme sur tout compact du produit

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + A_n\left(\frac{z}{z_n}\right)\right) = \prod_{n=1}^{+\infty} f_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)$$

□

Théorème 13.3. — *Soit h une fonction entière telle que $h(0) \neq 0$. Notons $z_1, z_2, \cdots$ les zéros de la fonction h (écrits plusieurs fois quand*

les zéros sont multiples). Alors il existe une fonction entière g et une suite p_n d'entiers ≥ 0 de telle sorte que :

$$h(z) = e^{g(z)} \prod_{n=1}^{+\infty} f_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right).$$

Démonstration. — Si on note comme dans le théorème précédent :

$$f(z) = \prod_{n=1}^{+\infty} f_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right),$$

alors $\frac{h(z)}{f(z)}$ est une fonction entière qui n'a pas de zéros. On peut donc écrire (cf. le lemme 12.26) :

$$\frac{h(z)}{f(z)} = e^{g(z)}$$

pour une certaine fonction entière $g(z)$. □

Le théorème précédent, qui a été établi pour des fonctions entières, peut maintenant être généralisé à un ouvert $U \neq \mathbb{C}$. En fait on va se placer dans $\overline{\mathbb{C}}$ ou encore de manière équivalente sur la sphère de Riemann S^2. Si $\infty \in U$ une fonction holomorphe sur U est une fonction holomorphe sur $U \setminus \{\infty\}$ telle que : $\lim_{z \in U, z \to \infty}$ existe et est un élément de $\mathbb{C}$.

Théorème 13.4. — *Soit U un ouvert de S^2 tel que $U \neq S^2$. Soit A une partie de U qui n'a pas de point d'accumulation dans U. À tout point $a \in A$ associons un nombre entier > 0 noté n_a. Il existe une fonction holomorphe f sur U dont les zéros a sont les points de A avec n_a comme ordre de multiplicité du zéro a.*

Démonstration. — Quitte à faire une transformation homographique on peut supposer que $\infty \in U$ et $\infty \notin A$. Alors $K = S^2 \setminus U$ est un sous-espace compact non vide du plan complexe. On notera z_0 un point de K.

(1) Si A est fini alors il suffit de prendre pour f une fraction rationnelle :

$$\frac{(z-a_1)^{m_{a_1}}(z-a_2)^{m_{a_2}} \cdots (z-a_n)^{m_{a_n}}}{(z-z_0)^{m_{a_1}+m_{a_2}+\cdots+m_{a_n}}}.$$

(2) Sinon, A est dénombrable (sinon il aurait un point d'accumulation dans U). On peut écrire à partir de A une suite $\{a_1, \cdots, a_n, \cdots\}$ dans laquelle chaque élément de A est écrit n_a fois. Pour tout n, soit $b_n \in K$

tel que $|b_n - a_n| = d(a_n, K)|$ (un tel b_n existe puisque K est compact). Alors comme A n'a pas de point d'accumulation dans U on peut dire que $\lim_{n\to+\infty} |b_n - a_n| = 0$. Soit C un compact de U. La distance de C à K est $r > 0$. En particulier pour tout point z de K et pour tout n on a $|z - b_n| \geq r$. En conséquence, il existe un entier k tel que pour tout $n \geq k$ et tout $z \in C$ on ait :

$$\left|\frac{b_n - a_n}{z - b_n}\right| \leq \frac{1}{2}.$$

La fonction :

$$f(z) = \prod_{n=1}^{+\infty} f_n\left(\frac{a_n - b_n}{z - b_n}\right)$$

où :

$$f_n(z) = (1 - z)e^{z+\frac{z^2}{2}+\cdots+\frac{z^n}{n}},$$

convient.

□

14. Le théorème de Mittag-Leffler

Ce théorème se préoccupe de construire des fonctions méromorphes dont on fixe les zéros et les pôles. Autrement dit on généralise les résultats du paragraphe précédent concernant les fonctions holomorphes et leurs zéros aux fonctions méromorphes et à leurs zéros et leurs pôles. À vrai dire on va se préoccuper de construire des fonctions dont on donne non seulement les pôles, mais toutes les parties singulières.

Théorème 14.1. — *Soit $(b_n)_n$ une suite de nombres complexes telle que $\lim_{n\to\infty} |b_n| = \infty$. On se fixe par ailleurs pour chaque n un polynôme P_n sans terme constant. Alors, il existe des fonctions méromorphes dans $\mathbb{C}$, ayant des pôles aux points b_n avec comme partie singulière $P_n(1/(z - b_n))$ en chaque pôle b_n. La fonction la plus générale réalisant ces conditions peut être écrite sous la forme :*

$$f(z) = \sum_{n\geq 1}\left(P_n\left(\frac{1}{z - b_n}\right) - p_n(z)\right) + g(z),$$

où les $p_n(z)$ sont des polynômes bien choisis afin d'assurer la convergence de la série, et où $g(z)$ est une fonction entière.

Démonstration. —

– **Les polynômes $p_n(z)$.** La fonction $P_n(1/(z-b_n))$ est holomorphe pour $|z| < |b_n|$. Considérons son développement de Taylor en 0, et prenons pour $p_n(z)$ ce développement de Taylor à l'ordre r_n. Soit B_n la boule fermée de centre 0 et de rayon $\rho_n < |b_n|$ où les ρ_n sont choisis de telle sorte que $\lim_{n\to+\infty} \rho_n = +\infty$ ce qui est possible en vertu de l'hypothèse sur le comportement à l'infini des b_n. Posons :

$$M_n = \sup_{z\in B_n} \left| P_n\left(\frac{1}{z-b_n}\right)\right|.$$

En raison du théorème de Cauchy et de la formule de Taylor on obtient l'inégalité :

$$\left| P_n\left(\frac{1}{z-b_n}\right) - p_n(z)\right| \leq M_n \left(\frac{|z|}{\rho_n}\right)^{r_n+1}$$

et donc :

$$\sum_{n\geq 1}\left| P_n\left(\frac{1}{z-b_n}\right) - p_n(z)\right| \leq \sum_{n\geq 1} M_n \left(\frac{|z|}{\rho_n}\right)^{r_n+1}.$$

– **Calcul préparatoire** Choisissons maintenant la suite r_n croissante vers $+\infty$ et telle que $r_n > \log(M_n)$. En appliquant le critère de Cauchy à la série entière lacunaire

$$\sum_{n\geq 1} M_n \left(\frac{|z|}{\rho_n}\right)^{r_n+1},$$

on voit que

$$\lim_n \frac{M_n^{\frac{1}{r_n+1}}}{\rho_n} = 0,$$

et donc cette dernière est convergente sur tout le plan complexe et uniformément convergente sur tout compact.

– **Retour au problème.** Soit maintenant $R > 0$. Il existe un ensemble fini I d'indices i pour lesquels $|b_i| \leq R$. On choisit pour tout $n \notin I$,

$$R < \rho_n < R + \frac{1}{2}(|b_n| - R).$$

On a donc aussi $\lim_{n\to+\infty} \rho_n = +\infty$, ce qui nous permettra d'utiliser le calcul fait dans la partie préparatoire. Comme nous allons utidier ce qu'il se passe sur le compact $|z| \leq R$, nous séparons la somme à étudier en deux morceaux : d'une part la somme finie

$$f_1(z) = \sum_{n\in I} \left(P_n \left(\frac{1}{z - b_n} \right) - p_n(z) \right) + g(z),$$

qui donne une fonction méromorphe sur le compact $|z| \leq R$ dont les pôles sont les b_i avec $i \in I$, et dont les arties principales en ces points sont celles annoncées, d'autre part la somme infinie

$$f_1(z) = \sum_{n\notin I} \left(P_n \left(\frac{1}{z - b_n} \right) - p_n(z) \right),$$

dont on a vu qu'elle convergeait uniformément sur le compact $|z| \leq R$ vers une fonction holomorphe grâce aux deux premières parties de la démonstration (en effet sur ce compact on a pour tout $n \notin I$ les inégalités $|z| \leq R < \rho_n$). Il est facile à partir de là d'obtenir le théorème annoncé puisque ce raisonnement peut être fait pour tout $R > 0$.

□

Index

---

3 Avril 2010

R. Rolland, Institut de Mathématiques de Luminy, Campus de Luminy, Case 907, 13288 MARSEILLE Cedex 9 • *E-mail :* `robert.rolland@acrypta.fr`
Url : `http://robert.rolland.acrypta.com/` `http://www.acrypta.com/` `http://galg.acrypta.com/`